2023. 4(4). 32–42

ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ

REINFORCED CONCRETE STRUCTURES (ZHELEZOBETONNYYE KONSTRUKTSII)

ISSN 2949-1622 (PRINT)
ISSN 2949-1614 (ONLINE)
HTTPS://G-B-K.RU

УДК 69.07
DOI: 10.22227/2949-1622.2023.4.32-42

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ/ RESEARCH ARTICLE

Интегральный метод определения основного напряжённого состояния анизотропной железобетонной оболочки

Е.М. Зверяев[1*]

[1] *Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы, Инженерная академия, Москва, Российская Федерация*

*zveriaev@mail.ru

Ключевые слова: железобетонная оболочка, моментная теория, безмоментная теория, перемещения, деформации бетона, уравнения равновесия.

История статьи
Поступила в редакцию: 12.05.2023
Доработана: 19.06.2023
Принята к публикации: 21.06.2023

Для цитирования
Зверяев Е.М. Интегральный метод определения основного напряжённого состояния анизотропной железобетонной оболочки // Железобетонные конструкции. 2023. Т. 4. № 4. С. 32–42.

Аннотация. В статье рассмотрен вопрос оценки прочности и напряженно-деформированного состояния железобетонной оболочки методом безмоментной теории и теории бесконечно малых изгибаний. Краткое описание методологии заключается в том, что основное напряжённое состояние оболочки выделяется в самостоятельную задачу, когда, не вводя в рассмотрение краевые эффекты, выделяется два из четырёх граничных условия общей моментной теории, которые вместе с уравнениями безмоментной теории определяют основное напряжённое состояние, а затем накладываются краевые эффекты. Представлены уравнения равновесия моментной теории в усилиях и моментах, геометрические уравнения, компоненты тангенциальной деформации и перемещения, и связывающие их физические уравнения состояния, выражающие усилия и моменты через компоненты деформации, так как характеристики напряженно-деформированного состояния оболочки зависят не только от изменяемости внешних воздействий и усилий, но и от длины конструкции. Установленные в статье положения сохраняются в случае оболочек из анизотропного материала, при условии выполнения представленного соотношения упругости. Решена система уравнений обобщенного полубезмоментного (полуизгибного) состояния произвольной оболочки нулевой кривизны, определяющая точность данного подхода. Представлены уравнения полубезмоментной теории для круговой цилиндрической оболочки, а также описывающие полубезмоментное напряженное состояние длинной оболочки нулевой кривизны. Наиболее важным результатом исследования является метод построения интегралов основного напряжённого состояния оболочки на базе метода простых итераций, расширяющего возможности теории надежности, что позволяет построить основы практического расчета железобетонных оболочек по безмоментной теории и теории бесконечно малых изгибаний.

Integral Method for Determining the Stress State of an Anisotropic Reinforced Concrete Shell

Eugene M. Zveryaev [1*]

[1] *Peoples' Friendship University of Russia named after P. Lumumba, Moscow, Russian Federation*

[*] zveriaev@mail.ru

Зверяев Евгений Михайлович, доктор технических наук, профессор, профессор Инженерной Академии , Российский университет дружбы народов им. П.Лумумбы, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, eLIBRARY SPIN-код: 4893-2337, Scopus: 57195225599, ResearcherID: IAR-2290-2023, ORCID: 0000-0001-8097-6684, E-mail: zveriaev@mail.ru

Keywords: reinforced concrete shell, moment theory, membrane theory, displacements, deformations of concrete, equilibrium equations.

Article history
Received: 12.05.2023
Revised: 19.06.2023
Accepted: 21.06.2023

For citation
Zveryaev E.M. Integral Method for Determining the Stress State of an Anisotropic Reinforced Concrete Shell. *Reinforced Concrete Structures.* 2023;4(4):32–42.

Abstract. The article deals with the issue of estimating the strength and stress-strain state of a reinforced concrete shell by the method of membrane theory and the theory of infinitesimal bending. A brief description of the methodology consists in the fact that the ground stress state of the shell is allocated to an independent problem, when, without introducing boundary effects, two of the four boundary conditions of the general moment theory are distinguished, which, together with the equations of the momentless theory, determine the ground stress state, and then boundary effects are superimposed. The equilibrium equations of the moment theory in forces and moments, geometric equations, components of tangential deformation and displacement, and the physical equations of state connecting them, expressing forces and moments through the components of deformation, are presented, since the characteristics of the stress-strain state of the shell depend not only on the variability of external influences and forces, but also on the length of the structure. The provisions laid down in the article shall be retained in the case of casings made of anisotropic material, provided that the presented elastic ratio is met. A system of equations of the generalized semi-membrane (semi-bending) state of an arbitrary shell of zero curvature, which determines the accuracy of this approach, is solved. The equations of the semi-torque theory for a circular cylindrical shell are presented, as well as describing the semi-membrane stress state of a long shell of zero curvature. The most important result of the study is the method of constructing integrals of the ground stress state of the shell based on the method of simple iterations, which expands the possibilities of the reliability theory, which makes it possible to build the foundations for the practical calculation of reinforced concrete shells according to the membrane theory and the theory of infinitesimal bending

ВВЕДЕНИЕ

Проектирование любых несущих конструкций, в том числе и железобетонных оболочек, предусматривает определение таких их параметров, при которых эти конструкции будут длительно и надежно выполнять свое назначение, иметь способность безотказно работать в течение заданного периода времени.

В научных работах многих авторов показано, что несущие конструкции зданий и сооружений испытывают как упругие, так и неупругие деформации [1-5]. Оболочки широко применяются в строительстве и, как известно, часть оболочек во время эксплуатации испытывает лишь упругие деформации и лишь иногда имеет место неупругая стадия работы оболочек [6, 7]. Различные воздействия, возникающие в процессе эксплуатации, как статические [8, 9], так и динамические [10] от распределенных и сосредоточенных нагрузок, определяют величины напряжений и деформаций, возникающих в оболочке.

В большинстве случаев для построения напряжённого состояния оболочки применяют метод расчленение общего напряжённого состояния на основной и краевой эффект, то есть построение основного напряжённого состояния выделяется в совершенно самостоятельную задачу [11, 12]. Не вводя в рассмотрение краевые эффекты, удаётся из четырёх граничных условий общей моментной теории выделить два граничных условия, которые вместе с уравнениями безмоментной теории однозначно определяют основное напряжённое состояние.

Проблема построения интегралов основного напряжённого состояния может быть рассмотрена на базе метода простых итераций, расширяющего возможности безмоментной теории и теории бесконечно малых изгибаний.

Eugene M. Zveryaev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia named after P. Lumumba, 6, Miklouho-Maclay St., Moscow, 117198, Russian Federation, eLIBRARY SPIN-код: 4893-2337, Scopus: 57195225599, ResearcherID: IAR-2290-2023, ORCID: 0000-0001-8097-6684, E-mail: zveriaev@mail.ru

МЕТОД

Уравнения равновесия моментной теории в усилиях и моментах:

- силовые уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(T_1-T_2)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(S_{21}+S_{12})-\left(\frac{N_1}{R_{11}}-\frac{N_2}{R_{12}}\right)+X_1=0,$$
$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(T_2-T_1)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(S_{12}+S_{21})-\left(\frac{N_2}{R_{22}}-\frac{N_1}{R_{12}}\right)+X_2=0, \qquad (1)$$
$$\frac{T_1}{R_{11}}-\frac{S_{21}+S_{12}}{R_{12}}+\frac{T_2}{R_{22}}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(A_2N_1)+\frac{\partial}{\partial \alpha_2}(A_1N_2)\right]+Z=0\ .$$

- уравнения равновесия моментов

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(M_1-M_2)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(H_{12}+H_{21})+N_2=0,$$
$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(M_2-M_1)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(H_{21}+H_{12})+N_1=0, \qquad (2)$$
$$S_{21}-S_{12}+\frac{H_{21}}{R_{11}}-\frac{H_{12}}{R_{22}}+\frac{M_2-M_1}{R_{12}}=0\ .$$

Геометрические уравнения, связывающие компоненты тангенциальной деформации и перемещения, можно записать так:

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_2-\frac{w}{R_{11}}-\varepsilon_1=0,$$
$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_1-\frac{w}{R_{22}}-\varepsilon_2=0, \qquad (3)$$
$$\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right)+\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right)+\frac{2w}{R_{12}}-\omega=0\ .$$

Изменения кривизны определяются выражениями:

$$\aleph_1=-\frac{1}{A_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\gamma_2+\frac{\delta}{R_{12}},$$
$$\aleph_2=-\frac{1}{A_2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\gamma_2-\frac{\delta}{R_{12}}, \qquad (4)$$
$$\tau=-\frac{1}{A_1}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\gamma_1+\frac{\omega_2}{R_{11}}-\frac{\varepsilon_2}{R_{12}},$$

где $\gamma_1=-\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}+\frac{u_1}{R_{11}}-\frac{u_2}{R_{12}}\right)$, $\qquad \gamma_2=-\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2}+\frac{u_2}{R_{22}}-\frac{u_1}{R_{12}}\right)$,

$$\omega_1=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_1+\frac{w}{R_{12}}, \qquad \omega_2=\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_2+\frac{w}{R_{12}},\ \ \delta=\frac{1}{2}(w_2-w_1).$$

Чисто статические (1), (2) и чисто геометрические (3), (4) уравнения связаны между собой физическими уравнениями состояния, выражающими усилия и моменты через компоненты деформации.

В литературе по теории оболочек можно найти различные варианты связи [13]. Это объясняется тем, что любая двумерная теория оболочек строится на тех или иных упрощающих предположениях [14], не сказывающихся на чисто статических и чисто геометрических соотношениях, но отражающихся на уравнениях состояния. Последние, в свою очередь, также являются приближёнными.

Наиболее простыми, обеспечивающими, тем не менее, достаточную точность, являются соотношения Лява [15] для оболочек, изготовленных из изотропного материала:

$$T_{1}=\frac{Eh}{1-v^2}\left(\varepsilon_1+v\varepsilon_2\right), \qquad T_2=\frac{Eh}{1-v^2}\left(\varepsilon_2+v\varepsilon_1\right)$$

$$S_{12}=S_{21}=\frac{Eh}{2(1+v)}\omega, \tag{5}$$

$$M_1=\frac{Eh^3}{12\left(1-v^2\right)}\left(\aleph_1+v\aleph_2\right), \qquad M_2=\frac{Eh^3}{12\left(1-v^2\right)}\left(\aleph_2+v\aleph_1\right),$$

$$H_{12}=H_{21}=\frac{Eh^3}{12(1+v)}\tau.$$

Соотношения (5) не удовлетворяют шестому уравнению равновесия, которое должно быть следствием парности касательных напряжений и удовлетворяться автоматически при точных выражениях усилий и моментов через деформации и параметры изменения кривизны. Так как система пяти уравнений равновесия в принципе достаточна для полного решения задач о деформации оболочки, шестое уравнение равновесия можно не рассматривать.

Из чего следует запись

$$S_{21}-S_{12}=0, \tag{6}$$

которая отличается от шестого уравнения равновесия отсутствием членов с H_{21} и H_{12}.

Нарушение шестого уравнения не имеет существенного значения, так как в дальнейшем будет показано, что отношения H_{12}/R_{11} , H_{21}/R_{22} всегда малы по сравнению с усилиями S_{12} ,S_{21} и поэтому можно принять (6) в качестве замены шестого уравнения равновесия. Кроме того, обычно принимают [16]:

$$H_{12}=H_{21}=H. \tag{7}$$

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Будем исходить из системы уравнений (1) – (4) с учётом (6) и (7), представив её в виде нескольких групп равенств, записанных в символическом виде:

1. Первые три уравнения равновесия сил

$$A_1T=-X-A_0N; \tag{8}$$

2. Первые три тангенциальных соотношения упругости

$$\varepsilon=A_2T; \tag{9}$$

3. Формулы: компоненты тангециальной деформации-перемещения

$$\varepsilon=A_3u; \tag{10}$$

4. Формулы: компоненты нетангенциальной деформации – перемещения

$$\aleph=A_4u; \tag{11}$$

5. Нетангенциальные соотношения упругости

$$M=h^2A_5\aleph; \tag{12}$$

6. Уравнения равновесия моментов

$$N=A_6M. \tag{13}$$

Соотношения (8)–(13) записаны с помощью матричных операторов A_i, вид которых легко устанавливается из сравнений с соответствующими уравнениями в развёрнутой записи.

Введены вектора:

$T=(T_1, S, T_2)$, $\varepsilon=(\varepsilon_1, \omega, \varepsilon_2)$, $u=(u_1, u_2, w)$, $\aleph=(\aleph_1, \tau, \aleph_2)$, $N=(N_1, N_2)$, $M=(M_1, H, M_2)$, $X=(X_1, X_2, Z)$.

Система (8) – (13) в предположении, что могут быть построены операторы A_1^{-1}, A_3^{-1}, обратные к A_1, A_3, сводится к одному уравнению

$N = h^2 BN + \Phi$, (14)

где $B = -A_6 A_5 A_4 A_3^{-1} A_2 A_1^{-1} A_0$; $\Phi = -h^2 A_6 A_5 A_4 A_3^{-1} A_2 A_1^{-1} X$.

В (8) и (10) A_1 и A_3 являются операторами одного и того же типа [15]:

A_1 – оператор безмоментных уравнений равновесия; A_3 – оператор бесконечно малых изгибаний срединной поверхности оболочки.

Обратные к ним операторы для оболочек нулевой кривизны построены в [15]. Для оболочек вращения второго порядка операторы A_1, A_3 приводятся к оператору Лапласа в случае положительной кривизны и к оператору уравнений колебания струны – в случае оболочек отрицательной кривизны [15]. Обратные к ним операторы записываются, в частности, в квадратурах по характеристикам, мнимым в случае положительной кривизны [17] и действительным в случае отрицательной кривизны [8].

Уравнение (14) удобно для решения методом последовательных приближений (простых итераций)

$N^{(n+1)} = h^2 B N^{(n)} + \Phi$. (15)

Причём элемент исходного приближения $N^{(0)}$ может быть выбран произвольно.

Положим в (15) $N^{(0)} = 0$. Тогда процесс интегрирования выглядит так:

- интегрируя уравнения (8), находим усилия $T_1^{(1)}, S^{(1)}, T_2^{(1)}$;

- по ним через (9) вычисляются компоненты тангенциальной деформации $\varepsilon_1^{(1)}, \omega^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}$;

- интегрируя уравнения (10) при известных $\varepsilon_1^{(1)}, \omega^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}$, находим перемещения $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, w^{(1)}$;

- по перемещениям через (11) вычисляем компоненты нетангенциальной деформации $\aleph_1^{(1)}, \tau^{(1)}, \aleph_2^{(1)}$;

- (12) позволяют вычислить моменты;

- по известным моментам через (13) вычисляем $N^{(1)}$.

Расчёт по безмоментной теории можно понимать как вычисление первой итерации при выборе исходного приближения $N^{(0)} = 0$.

Уравнения (8) – (13) могут быть сведены к другому векторному уравнению, отличному от (14)

$\varepsilon = hC\varepsilon + \psi$, (16)

где $C = -A_2 A_1^{-1} A_0 A_6 A_5 A_4 A_3^{-1}$, $\psi = -A_2 A_1^{-1} X$.

Уравнение (16) также удобно решать методом последовательных приближений

$\varepsilon^{(n+1)} = h^2 C\varepsilon^{(n)} + \psi$. (17)

Выбрав в (17) $\varepsilon^{(0)} = 0$, получим чисто моментный итерационный процесс предыдущего параграфа. Процедура интегрирования выглядит так:

1) интегрируя уравнения (8) находим перемещения $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, w^{(1)}$;

2) по ним с помощью (9) вычисляются компоненты нетангенциальной деформации $\aleph_1^{(1)}, \tau^{(1)}, \aleph_2^{(1)}$;

3) с помощью соотношений упругости (5) вычисляются моменты;

4) по соотношениям (6) вычисляются перерезывающие силы $N_1^{(1)}, N_2^{(1)}$;

5) вносим вектор $N_1^{(1)}$ в (8) и, интегрируя безмоментные уравнения (8), находим $T_1^{(1)}, S^{(1)}, T_2^{(1)}$;

6) затем алгебраически через (9) вычисляются $\varepsilon_1^{(1)}, \omega^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}$.

На этом процесс вычисления первой итерации считаем законченным.

Решение задачи по итерационной схеме (15) будем называть безмоментным итерационным процессом, а по схеме (17) – чисто моментным (или изгибным) итерационным процессом.

Сравнивая оба процесса, замечаем, что они заключаются в последовательном циклическом применении операторов $A_0 \ldots A_6$. Отличаются эти процессы только началом итерации, т.е. тем, какая из искомых величин выбирается в качестве исходной в нулевом приближении.

Если исходить из предложения о безмоментности искомого напряженно–деформированного состояния железобетонной оболочки, естественно предложить $N^{(0)}=0$. В том случае, когда очевидно, что тангенциальные деформации малы по сравнению с перемещениями, естественно предложить $\varepsilon^{(0)} = 0$.

Уравнения типа (14), (16) можно написать относительно любого из искомых векторов. Например, для вектора перемещений оно будет таким:

$$u = h^2 D u + \Theta, \quad D = -A_3^{-1} A_2 A_1^{-1} A_0 A_6 A_5 A_4, \quad \Theta = -A_3^{-1} A_2 A_1^{-1} X. \tag{18}$$

Здесь итерационный процесс начинается с задания перемещений $u^{(0)}$ и вычисления по ним компонентов изгибной деформации, моментов, перерезывающих сил и т.д. Уравнение (18) удобно для расчёта оболочек с сосредоточенными включениями, т.к. при этом можно всё-таки в той или иной степени предугадать качественно характер перемещений.

Свобода выбора исходного приближения позволяет с помощью уравнения (16) получить в случае оболочки нулевой кривизны уравнения полубезмоментной теории, где при разыскании интегралов методом простых итераций исходное приближение выбрать следующим образом

$$\varepsilon_1^{(0)} = \varepsilon_1, \quad \omega^{(0)} = \varepsilon_2^{(0)} = 0, \tag{19}$$

то последовательное применение соответствующих операторов отвечает расчёту по полубезмоментной теории. Легко видеть, что все искомые неизвестные при этом выражаются в течение первой итерации через ε_1.

Примем, что срединная поверхность оболочки есть произвольная поверхность нулевой кривизны (цилиндр, конус и пр.) и отнесём её к линиям кривизны (α_1, α_2). Тогда будет

$$A = 1, \quad R_{11} = R_{12} = \infty, \quad R_{22} = R. \tag{20}$$

Внесём (20) в (1) – (7). Получим следующую систему уравнений, описывающих состояние оболочки нулевой кривизны:

- геометрические уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} = \varepsilon_1, \quad \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial u_2} + A_2\left(\frac{u_2}{A_2}\right) = \omega, \tag{21}$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial u_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 = \varepsilon_2 .$$

-формулы – компоненты нетангенциальной деформации – перемещения

$$\aleph_1 = -\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1}, \qquad \aleph_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, \tag{22}$$

$$\tau = -\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1}, \qquad \gamma_1 = -\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \qquad \gamma_2 = -\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R}\right).$$

- нетангенциальные соотношения упругости

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\aleph_1 + \nu\aleph_2), \; M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\aleph_2 + \nu\aleph_1), \tag{23}$$

$$H = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\tau .$$

- уравнения равновесия моментов

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{2}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H + N_2 = 0$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(M_2-M_1\right)+N_1=0, \tag{24}$$

- уравнения равновесия сил

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(T_1-T_2\right)+X_1=0$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}+\frac{2}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}S-\frac{N_2}{R}+X_2=0 \tag{25}$$

$$\frac{T_2}{R}+\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(A_2N_1\right)+\frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2}\right]+Z=0$$

- тангенциальные соотношения упругости

$$Eh\varepsilon_1 = T_1 - \upsilon T_2,\ Eh\omega = 2(1+\upsilon)S,\quad Eh\upsilon_2 = T_2 - \upsilon T_1. \tag{26}$$

Приняв в уравнениях (21) $\omega=\varepsilon_2=0$, можно выразить u_1, u_2, w через ε_1. Затем с помощью (22) через ε_1 выражаются $\aleph_1$, $\aleph_2$, τ и затем моменты M_1, H, M_2. Выразив на основании (24) перерезывающие силы N_1, N_2 через ε_1 и подставив их в (25), получим выражения для усилия T_1, S, T_2 через одну неизвестную ε_1.

Соотношения (26) и (21) позволят найти погрешность выбора исходного приближения.

Погрешность можно оценить на основе асимптотических представлений искомых неизвестных. Поскольку все величины выражаются через ε_1, примем

$$\varepsilon_1 \sim h^0, \tag{27}$$

т.е. ε_1 выбирается в качестве опорной эталонной величины.

Деформированное состояние в оболочке нулевой кривизны имеет очевидную особенность – оно медленно изменяется вдоль образующих и быстро в окружном направлении.

Естественно предположить, что символам дифференцирования можно придать следующий смысл:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \sim h^0,\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \sim h^{-q}. \tag{28}$$

Понимая под этим, что дифференцирование в качественном смысле равносильно увеличению порядка величины, в которой оно применяется.

Тогда, поступая так, как это описано выше, получим следующие оценки искомых величин:

$$\begin{aligned}
&u_1 \sim h^0;\ u_2 \sim h^{-q},\ w \sim h^{-2q}\\
&\aleph_1 \sim h^{-2q},\ \tau \sim h^{-3q},\ \aleph_2 \sim h^{-4q}\\
&M_1, M_2 \sim h^{2-4q},\ H \sim h^{2-3q}\\
&N_1 \sim h^{2-4q},\ N_2 \sim h^{2-5q}\\
&T_2 \sim h^{2-6q},\ S \sim h^{2-7q},\ T_1 \sim h^{2-8q}\\
&\omega \sim h^{2-7q},\ \varepsilon_2 \sim h^{2-8q},\quad \varepsilon_1 \sim h^{2-8q}
\end{aligned} \tag{29}$$

Для того, чтобы последняя оценка в (29) не противоречила (27), необходимо

$$2 - 8q = 0. \tag{30}$$

Таким образом, выбор исходного приближения (19) позволяет находить деформированные и напряжённые состояния с нулевой изменяемостью по α_1 и изменяемостью с показателем ¼ в криволинейном направлении.

Из (29) видно, что

$$\sigma_M \sim h^{-4q},\quad \sigma_T \sim h^{1-8q}. \tag{31}$$

При $q < ¼ \rightarrow \sigma_T >> \sigma_M$, при $q > ¼ \rightarrow \sigma_M >> \sigma_T$, и при $q = ¼ \rightarrow \sigma_T \sim \sigma_M$, т.е. оболочка находится в безмоментном состоянии при $q < ¼$, в чисто моментном при $q > ¼$ и в смешанном при $q = ¼$.

Под символами σ_T и σ_M понимаются напряжения от наибольшего усилия и наибольшего момента.

Также из (29) следует $\aleph_2 >> \aleph_1$, указывая, строго говоря, не на полубезмоментность выделенного состояния, а на его «полуизгибность».

Все установленные здесь положения сохраняются в случае оболочек из анизотропного материала, при условии выполнения соотношения упругости для оболочек из анизотропного материала с учётом (6) и (7).

Отбросим на основании оценок (29) второстепенные слагаемые в уравнениях (21) – (26). Получаем:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}=\varepsilon_1,\ \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}+A_2\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right)=0,$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_1-\frac{w}{R}=0$$

$$\aleph_1=\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2},\ \aleph_2=\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2},\ \tau=\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \tag{32}$$

$$M_2=\frac{Eh^3}{12(1-v^2)}\aleph_2,\qquad M_1=vM_2,\qquad H=\frac{Eh^3}{12(1+v)}\tau$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2}+N_2=0,\qquad \frac{1}{A_2}\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(M_2-M_1)+N_1=0$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(T_1-T_2)+X_1=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2}+\frac{2}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}S+X_2=0$$

$$\frac{T_2}{R}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2}+Z=0$$

$$Eh\varepsilon_1=T_1,\qquad Eh\omega=2(1+v)S,\qquad Eh\varepsilon_2=-vT_1.$$

Систему (32) назовем системой обобщенного полубезмоментного (полуизгибного) состояния произвольной оболочки нулевой кривизны.

Рассматривая уравнения (24) произведем в них замену переменных по формулам сославшись на (29):

$$u_1=U_1,\quad u_2=h^{-\frac{1}{4}}U_2,\quad w=h^{-\frac{1}{2}}W$$

$$\varepsilon_1=h^{\circ}\xi_1,\qquad \omega=h^{\frac{1}{4}}\Omega,\qquad \varepsilon_2=h^{\circ}\xi_2,\qquad \frac{\partial}{\partial \alpha_2}=h^{-\frac{1}{4}}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

После замены получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_1}-\xi_1=0,\qquad \frac{1}{A_2}\frac{\partial U}{\partial \theta}+A_2\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{U_2}{A_2}\right)-h^{\frac{1}{2}}\Omega=0$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial U_2}{\partial \theta}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_1-\frac{W}{R}-h^{\frac{1}{2}}\xi_2=0.$$

Поскольку все величины, кроме $h^{\frac{1}{2}}\Omega$ и $h^{\frac{1}{2}}\xi_2$, входящие в левые части двух последних равенств, имеют порядок h^0, отбрасывание слагаемых, имеющих множитель $h^{\frac{1}{2}}$ приводит к погрешности $h^{\frac{1}{2}}$. Это и есть точность полубезмоментной теории.

Особенно простой вид имеют уравнения полубезмоментной теории в случае круговой цилиндрической оболочки.

Предположим, что срединная поверхность цилиндра имеет $R=1$ и отнесена к системе координат ξ,θ, где ξ - относительное (измеренное в долях R) расстояние по образующей, θ - относительное расстояние по направляющему кругу, т.е. центральный угол.

С учетом того, что $A_2 = R = 1$, уравнения (32) приводят к виду:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \varepsilon_1, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = 0, \quad w = \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \quad \aleph_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad M_2 = \frac{Eh^3}{12},$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \theta} + N_2 = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \theta} + X_1 = 0, \quad Eh\varepsilon_1 = T_1 \tag{33}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{\partial T_2}{\partial \theta} X_2 = 0, \quad T_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + Z = 0.$$

$$\aleph_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta}, \quad M_1 = \nu M_2,$$

$$H = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\tau, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial M_1}{\partial \xi} + N_1 = 0 \tag{34}$$

$$Eh\varepsilon_2 = -\nu T_1, \quad Eh\omega = (1+\nu)S.$$

Уравнения (33) образуют замкнутую систему, традиционно сводящуюся к одному разрешающему уравнению относительно некоторой функции напряжений или перемещения:

$$Eh\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial^8 w}{\partial \theta^8} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} - \frac{\partial X_2}{\partial \theta} + \frac{\partial X_1}{\partial \xi}\right). \tag{35}$$

Интегрируя это уравнения, находим w. Остальные неизвестные определяются через (33), (34) по w прямыми действиями.

Уравнения (33), (34) выведены для оболочек, называемых оболочками средней длины.

Получим уравнения, описывающие полубезмоментное напряженное состояние длинной оболочки нулевой кривизны, приняв вместо (20) в (1)-(7)

$$A_1=L, \quad R_{11}=R_{12}=\infty, \quad R_{22}=R, \tag{36}$$

где L- длина оболочки.

Оставив в силе (28), получим следующие асимптотические оценки искомых неизвестных:

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \sim h^0, \; u_1 \sim h^{-l}, \; u_2 \sim h^{-q-2l}, \; w \sim h^{-2q-2l}$$

$$\aleph_1 \sim h^{-2q}, \; \tau \sim h^{-3q-l}, \; \aleph_2 \sim h^{-4q-2l}$$

$$(M_1, M_2) \sim h^{2-4q-2l}, \; H \sim h^{2-3q-l}$$

$$N_1 \sim h^{2-4q-l}, \; N_2 \sim h^{2-5q} \tag{37}$$

$$T_1 \sim h^0, \; (\omega, S) \sim h^{q+l}, \; T_2 \sim h^{2q+2l}.$$

Здесь введено обозначение $h^{-l}=L$.

Подставив (36) в (1)-(4) и оставив в уравнениях только главные слагаемые, получим полубезмоментные уравнения длинной оболочки нулевой кривизны:

$$\frac{1}{L}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} = \varepsilon_1, \quad \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{A_2}{L}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{LA_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_1 - \frac{w}{R} = 0$$

$$\aleph_1 = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}, \quad \aleph_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \quad \tau = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \tag{38}$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\aleph_2, \qquad M_1 = \nu M_2, \qquad H = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\tau$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} + N_2 = 0, \qquad \frac{1}{A_2}\frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{L}\frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} - j\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(M_2 - M_1) + N_1 = 0$$

$$\frac{1}{L}\frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} + j\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(T_1 - T_2) + X_1 = 0$$

$$\frac{1}{L}\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} + j\frac{2}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}S + X_2 = 0$$

$$\frac{T_2}{R} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} + Z = 0\,.$$

Вопрос близости полубезмоментной теории В.З. Власова и его же теории тонкостенных стержней с позиций метода простых итераций [18] рассмотрен в статье [19].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения (38), за исключением множителя $1/L$ и условно введенного j, совпадают с уравнениями (32). Множитель $j=0$, если оболочка цилиндрическая. Если оболочка коническая, то длинной она может быть, только при условии слабой конусности, т.е. являясь почти цилиндрической.

В этом случае $\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \langle\langle 1$, но принять $j=0$ нельзя, т.к. члены вида $\frac{1}{L}\frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1}$, $\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(T_1 - T_2)$ могут оказаться соизмеримыми между собой.

Известно, что характеристики напряженно-деформированного состояния оболочки зависят не только от изменяемости, но и от длины. Смешанное состояние будет реализоваться при следующем соотношении между изменяемостью q и показателем длины l:

$$q = \frac{1-2l}{4}\,. \tag{39}$$

При $l=0$, когда длина оболочки соизмерима с ее радиусом, имеем $q=1/4$. С другой стороны, $q=0$ при $l=1/2$. Учитывая использованное в (37) обозначение, заключаем, что это соответствует длине оболочки $L{\sim}h^{-1/2}$. При $h=0.01$ изменяемость в криволинейном направлении будет нулевой, если оболочка будет иметь длину 10 и более радиусов R. Это говорит о том, что в такой оболочке напряжения от изгиба оболочки как стержня и напряжения от изгибаний оболочки становятся соизмеримыми между собой. Чем короче оболочка, тем дольше она остается безмоментной по мере увеличения нагрузки в криволинейном направлении. При $h=0.01$ и $l=-1/2$, т.е. при длине оболочки $\sim 0{,}1R$, имеем изменяемость смешанного состояния $q=1/2$. Практически это означает, что короткая железобетонная оболочка почти всегда безмоментна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бондаренко В.М., Колчунов В.И.* Расчетные модели силового сопротивления железобетона, Монография. 2004. 112 с.
2. *Тамразян А.Г.* Расчет конструктивных элементов с заданным нормальным распределением и надежностью и несущей способностью // Вестник МГСУ. 2012. № 10. С.109-115.
3. *Тамразян А.Г.* К устойчивости внецентренно сжатых железобетонных элементов с малым эксцентриситетом с учетом реологических свойств бетона // Железобетонные конструкции. 2023;2(2):48-57.
4. *Zverjaev E.M., Berlinov M.V., Berlinova M.N.* The integral method of definition of basic tension condition of anisotropic shell // International Journal of Applied Engineering Research. 2016. T. 11, Pp. 5811.
5. *Зверяев Е.М., Берлинова М.Н., Ким А.Л.* Оценка критерия прочности бетона на примере аналогии теорий цилиндрических оболочек и балок // Естественные и технические науки. 2014. № 9-10 (77). С. 358-360.
6. *Власов В.З.* Избранные труды, т.1. М.: Издательство АН СССР, 1962. 578 с.

7. *Колкунов Н.В.* Основы расчета упругих оболочек. М.: Высшая школа, 1987. 256 с.
8. *Филин А.П.* Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат., 1987. 384 с.
9. *Тур В.И.* Купольные конструкции: формообразование, расчет, конструирование, повышение эффективности. Учебное пособие. М.: Изд. АСВ, 2004. 96 с.
10. *Якушев Н.З.* Колебания цилиндрической оболочки средней толщины // III Сборник трудов КГУ. Казань: 1965. С.173-180.
11. *Амбарцумян С.А*. Общая теория анизотропных оболочек // Москва: Наука, 1974.-446 с.
12. *Выборнов В.Г.* Исследование устойчивости анизотропных оболочек вращения с помощью комплексных уравнений // III Сборник трудов КГУ. Казань: 1965. -С.46-54.
13. *Жилин П.А.* Прикладная механика. Основы теории оболочек: Учеб. Пособие. СПб.:Изд-во Политехн. ун-т. 2006. 167 с.
14. *Фирсанов В.В., Доан Ч.Н.* Замкнутая цилиндрическая оболочка под действием локальной нагрузки // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Том 17, № 1. С. 91-106.
15. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.-512 с.
16. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.
17. *Зверяев Е.М., Макаров Г.И*. Выделение уравнений элементарных напряженных состояний из уравнений оболочек нулевой кривизны // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 4. С. 6.
18. *Зверяев Е.М.* Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // ПММ. 2019. Т. 83. No 5–6. С. 823–833.
19. *Зверяев Е.М., Тупикова Е.М.* Итерационные методы построения решения уравнений незамкнутых оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 588–607. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-588-607

REFERENCES

1. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. Computational models of power resistance of reinforced concrete. Moscow,. 2004. 112 p. (in Russ.)
2. Tamrazyan A.G. Calculation of structural elements with a given normal distribution and reliability and bearing capacity. *Bulletin of MGSU*. 2012. No. 10. P.109-115. (in Russ.)
3. Tamrazyan A.G. On the stability of eccentrically compressed reinforced concrete elements with a small eccentricity taking into account the rheological properties of concrete. *Reinforced concrete structures*. 2023. 2(2). Pp. 48-57. (in Russ.)
4. Zverjaev E.M., Berlinov M.V., Berlinova M.N. The integral method of definition of basic tension condition of anisotropic shel. *International Journal of Applied Engineering Research*. 2016. T. 11, Pp.5811. (in Russ.)
5. Zveryaev E.M., Barinova M.N., Kim A.L. Evaluation of the concrete strength criterion by the example of analogy of theories of cylindrical shells and beams. *Natural and technical Sciences*. 2014. No. 9-10 (77). Pp. 358-360. (in Russ.)
6. Vlasov V.Z. Selected works, vol. 1. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1962.-578 p. (in Russ.)
7. Kolkunov N.V. Fundamentals of calculation of elastic shells. Moscow: Higher School, 1987. 256 p. (in Russ.).
8. Filin A.P. Elements of the theory of shells. Leningrad: Stroyizdat., 1987. 384 p. (in Russ.)
9. Tur V.I. Dome structures: shaping, calculation, design, efficiency improvement. Tutorial. Moscow: Publishing ASV, 2004. 96 p. (in Russ.).
10. Yakushev N.Z. Oscillations of the cylindrical shell of average thickness. III Collection of works of KSU. Kazan: 1965. Pp.173-180.
11. Hambardzumyan S.A. General theory of anisotropic shells. Moscow: Science, 1974.-446 p.
12. Vybornov V.G. Investigation of the stability of anisotropic shells of rotation with the help of complex equations. III Collection of works of KSU. Kazan: 1965. –Pp.46-54.
13. Zhilin P.A. Applied Mechanics. Fundamentals of the theory of shells: Textbook. Allowance. Saint Petersburg.: Publishimg of the Polytechn. univ. 2006. 167 p.
14. Firsanov, V.V., Doan Ch.N. Closed cylindrical shell under local load. *Mechanics of composite materials and structures*. 2011. Volume 17, No. 1. pp. 91-106.
15. Goldenweiser A.L. Theory of elastic thin shells. Moscow: Science, 1976.-512 p.
16. Vasiliev V.V. Mechanics of structures from composite materials. Moscow: Mechanical Engineering, 1988.-270 p.
17. Zveryaev E.M., Makarov G.I. Isolation of the equations of elementary stress states from the equations of shells of zero curvature. *Construction mechanics of engineering structures and structures*. 2012. No. 4. p. 6.
18. Zveryaev E.M. Saint-Venant-Picard-Banach method of integration of equations of elasticity theory of thin-walled systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2019. T. 83. No 5–6. Pp. 823-833.
19. Zveryaev E.M., Tupikova E.M. Iterative methods for constructing the solution of equations of open shells. *Construction mechanics of engineering structures and structures*. 2021. T. 17. No. Pp. 588–607. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-588-607