



УДК 624.04:519.62

DOI: 10.22227/2949-1622.2024.1.68-78

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ/ RESEARCH ARTICLE

Вариационно-разностный метод расчета слоистых резинометаллических виброизоляторов, применяемых для защиты железобетонных зданий от техногенной вибрации

Д.К. Сизов^{1, 2*}¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация² ООО «Вибросейсмозащита», Москва, Российская Федерация

* newfff@mail.ru

Ключевые слова: виброизоляция, метод конечных элементов, вариационно-разностный метод, резинометаллический виброизолятор, техногенные вибрации.

История статьи

Поступила в редакцию: 02.07.2023

Доработана: 12.07.2023

Принята к публикации: 19.07.2023

Для цитирования

Сизов Д.К. Вариационно-разностный метод расчета слоистых резинометаллических виброизоляторов, применяемых для защиты железобетонных зданий от техногенной вибрации // Железобетонные конструкции. 2024. Т. 5. № 1. С. 68–78.

Аннотация. В современном строительном комплексе г. Москвы для защиты зданий и сооружений от техногенной вибрации, возникающей от движения составов рельсового транспорта (поездов метрополитена, линий железной дороги и трамваев), используются слоистые резинометаллические виброизоляторы [1]. Чаще всего для определения их статических и динамических характеристик применяют метод конечного элемента (МКЭ), который позволяет определить все компоненты напряженно-деформированного состояния и частоты свободных колебаний в нагруженном состоянии практически для любых конструктивных форм изоляторов. Однако для наиболее популярных программных комплексов, реализующих МКЭ, задача оптимизации конструктивной формы виброизолятора все еще требует значительных временных затрат на многократное изменение расчетной сетки конечных элементов, повторного задания граничных условий и реализацию серии расчетов. Лишь некоторые из программных комплексов, реализующих МКЭ, решают оптимизационные задачи формы рассчитываемого изделия, чаще всего это относится к иностранным программным продуктам с универсальным функционалом. Наиболее близко методу конечного элемента (МКЭ) по своим вычислительным возможностям соответствует вариационно-разностный метод (ВРМ). С использованием ВРМ возможно создать программные модули, многократно автоматически решающие трехмерные задачи теории упругости с учетом изменившейся геометрии виброизолятора: габаритов изделия, расположения перфораций в пределах резиновых слоев, а также толщин резинового слоя и других параметров, важных для получения эффективного технического решения для виброизоляции зданий. Далее в статье описывается методика реализации вариационно-разностного метода (ВРМ) применительно к решению задачи определения компонент напряженно-деформированного состояния внутри трехмерного слоистого виброизолятора с перфорациями различных размеров, имеющими различное расположение относительно контура виброизолятора, т.е. приводится решение задачи оптимизации трехмерной формы виброизолятора.

Дмитрий Константинович Сизов, кандидат технических наук, доцент, ООО «Вибросейсмозащита», 109341, г. Москва, ул. Братиславская, д. 6, доцент кафедры строительной и теоретической механики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 4499-6656, Scopus: 57192559647, e-mail: vibroprotect@mail.ru.

© Сизов Д.К., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Variation-Difference Method of Calculation of Layered Rubber-Metal Vibration Isolators Used for Protection of Reinforced Concrete Buildings from Anthropogenic Vibration

Dmitry K. Sizov^{1, 2*}

¹ Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), Moscow, Russian Federation

² ООО “Vibroseismozaščita”, Moscow, Russian Federation

* newfff@mail.ru

Keywords: vibration isolation, finite element method, variational-difference method, rubber-metal vibration isolator, technogenic vibrations.

Article history

Received: 02.07.2023

Revised: 12.07.2023

Accepted: 19.07.2023

For citation

Sizov D.K. Variation-Difference Method of Calculation of Layered Rubber-Metal Vibration Isolators Used for Protection of Reinforced Concrete Buildings from Anthropogenic Vibration. *Reinforced concrete structures*. 2024; 1(5):68-78.

Abstract. In the modern construction complex of the city of Moscow for the protection of buildings and structures from man-made vibration arising from the movement of trains of rail transportation (subway trains, railroad lines and trams). To protect buildings and structures from anthropogenic vibration arising from the movement of rail transport trains (subway trains, railroad lines and streetcars), Moscow uses layered rubber-metal vibration isolators [1]. Most often, to determine their static and dynamic characteristics, the finite element method (FEM) is used, which makes it possible to determine all components of the stress-strain state and frequencies of free oscillations in the loaded state practically for any structural forms of isolators. However, for the most popular software packages that implement FEM, the problem of optimizing the structural shape of the vibration isolator still requires significant time expenditures for multiple changes of the finite element mesh, repeated setting of boundary conditions and implementation of a series of calculations. Only some of the software packages implementing the FEM solve optimization problems of the shape of the product being calculated, most often it is related to foreign software products with universal functionality. Variation-difference method (VDM) is the closest to the finite element method (FEM) in terms of its computational capabilities. It is possible to create program modules that repeatedly and automatically solve three-dimensional problems of elasticity theory taking into account the changed geometry of the vibration isolator: the dimensions of the product, the location of perforations within the rubber layers, as well as the thickness of the rubber layer and other parameters important for obtaining an effective technical solution for vibration isolation of buildings. Further, the article describes the method of implementation of the variational-difference method (VDM) as applied to the solution of the problem of determining the components of the stress-strain state inside a three-dimensional layered vibration isolator with perforations of different sizes having different locations relative to the contour of the vibration isolator, i.e., the solution of the problem of optimizing the three-dimensional shape of the vibration isolator is given.

ВВЕДЕНИЕ

В середине 1980-х гг. доктором технических наук М.А. Дашевским [1] была предложена уникальная система виброизоляции строительных объектов, основанная на применении системы заменяемых резинометаллических виброизоляторов, устанавливаемых под конструкциями здания. Данный метод позволяет осуществлять установку виброизоляторов в проектное положение уже после возведения основных несущих конструкций, что с одной стороны не сдерживает процесс возведения монолитных конструкций здания, а с другой — позволяет минимизировать неточности определения действующих вертикальных нагрузок в уровне виброизоляционного шва.

Dmitry K. Sizov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, ООО “Vibroseismozaščita”, Bratislavskaya st. 6, Moscow, 10934, Russian Federation, Associate Professor of the Department of Structural and Theoretical Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4499-6656, Scopus: 57192559647, e-mail: vibroprotect@mail.ru.

Суть данного подхода заключается в следующем [2]:

- на этапе проектирования железобетонных конструкций здания предусматривается горизонтальный виброизоляционный шов, перерезающий все несущие конструкции здания в уровне подвального (цокольного) этажа здания;
- на некоторых участках виброизоляционного шва в несущих конструкциях (стенах и колоннах) устраиваются специальные ниши, предназначенные для последующей установки резинометаллических виброизоляторов;
- после возведения 70–80 % «коробки здания» начинается сам процесс монтажа виброизоляторов в существующие ниши. Монтаж виброизоляторов заключается в последовательном многоцикловом сжатии виброизоляторов под зданием до проектных значений нагрузки с последующей фиксацией в сжатом состоянии с использованием металлических пластинок;
- в определенный момент времени суммарное усилие [3], действующее со стороны поля резинометаллических виброизоляторов, размещенных в уровне виброизоляционного шва, начинает превышать вес здания. В этот момент происходит раскрытие предварительно предусмотренного на этапе проектирования виброизоляционного шва с «вывешиванием здания» на резинометаллических виброизоляторах; вся нагрузка от верхней, виброизолированной части здания передается на нижнюю только через резинометаллические виброизоляторы.

Схематично система виброизоляции показана на рис. 1 на примере административного здания, расположенного по адресу: г. Москва, ул. Волхонка, д. 6. Данное административное здание успешно виброизолировано в г. Москве в 2006–2007 гг. с использованием описанной технологии.

Основой системы виброизоляции данного здания, а также и иных зданий, виброизолируемых по описанной ранее методике, является слоистый резинометаллический виброизолятор, представляющий собой конструктивный элемент, состоящий из чередующихся слоев резины и более тонких слоев металла [3, 4], выполняющих роль арматуры, препятствующей чрезмерным деформациям резиновых слоев (см. рис. 3).

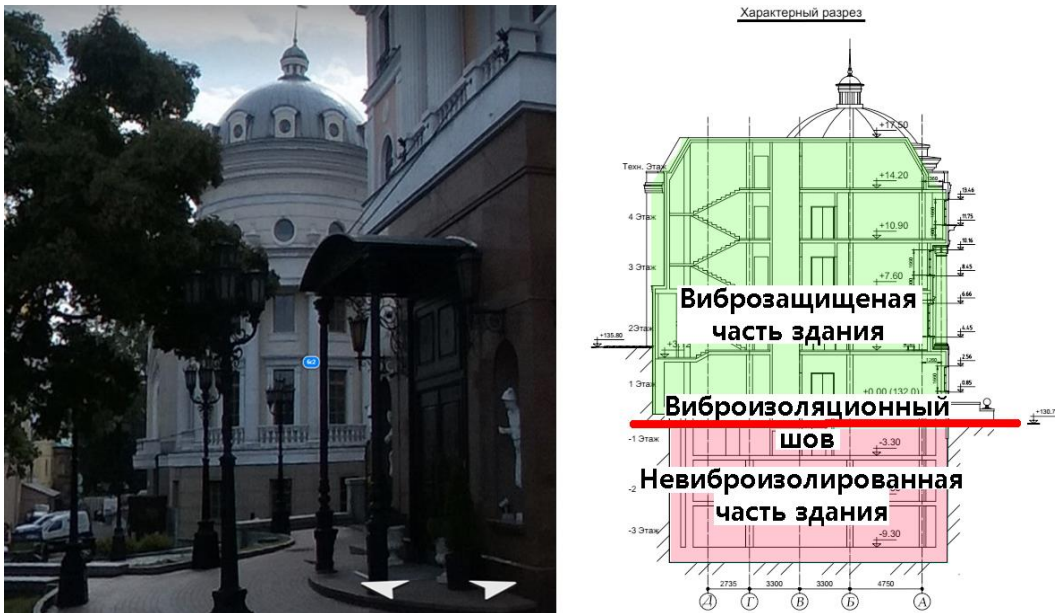


Рис. 1. Внешний вид виброизолированного здания в г. Москве и принципиальная схема виброзащиты
Figure 1. External view of the vibration-isolated building in Moscow and the principle scheme of vibration protection



Рис. 2. Конструкции ниш для установки виброизоляторов после бетонирования цокольного этажа здания и ниша с установленным в проектное положение виброизолятором

Figure 2. Construction of niches for installation of vibration isolators after concreting of the basement of the building and the niche with the vibration isolator installed in the design position

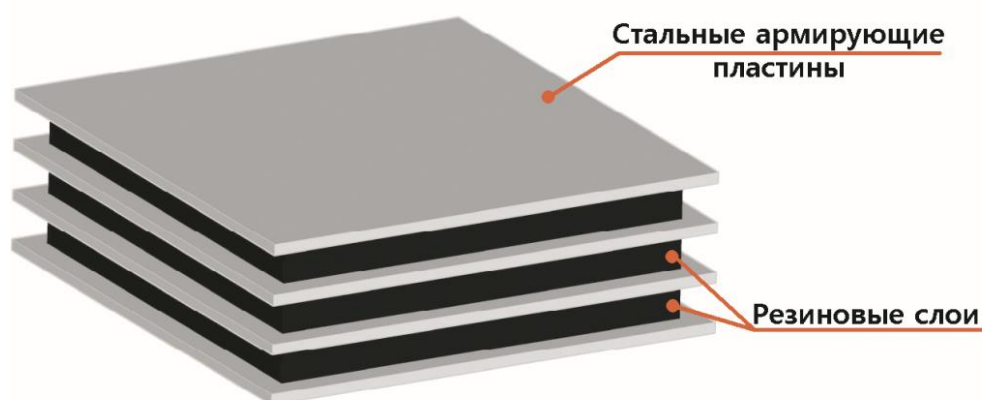


Рис. 3. Типовой резинометаллический виброизолятор с тремя резиновыми слоями

Figure 3. Typical rubber-metal vibration isolator with three rubber layers

Как показано на рис. 3, используемые в практике современного строительства виброизоляторы обладают резиновыми слоями без перфораций, что, безусловно, приводит к более компактным техническим решениям, позволяя воспринимать большие нагрузки при меньшей площади виброизолирующего элемента, но жесткостные свойства систем виброизоляторов, основанных на полнотелых (без перфораций) виброизоляторах, весьма высоки.

Для снижения общей жесткости системы виброизоляции, и, следовательно, повышения эффективности виброзащиты, предполагается возможность использования перфорированных виброизоляторов [2], в которых отверстия размещены внутри толщины резиновых и стальных слоев. С учетом практической несжимаемости резины (коэффициент Пуассона близок к 0,5) использование перфораций позволяет конструкции виброизолятора значительно сильнее деформироваться за счет более развитой боковой поверхности и перемещения части резинового слоя внутрь перфораций.

К тому же, как показала серия ранее выполненных с использованием МКЭ [5] и ВРМ расчетов, внутри резинометаллических виброизоляторов, в случае наличия сплошного резинового

слоя в центральной зоне, формируется область, где НДС близко к условиям всестороннего сжатия. Использование перфораций позволяет значительно сократить размеры данной зоны, что также может способствовать [2] увеличению эффективности работы виброизоляторов. Целью статьи является оценка ожидаемого снижения грузоподъемности виброизолятора при наличии отверстий, а также оценка влияния отверстий на эффективность виброизоляции.

МЕТОД

Описание технологии метода ВРМ

В первом приближении для оценки теоретического влияния перфораций на несущую способность резинометаллических виброизоляторов задачу расчета виброизолятора автор производит в трехмерной постановке с использованием известных соотношений теории упругости.

Как известно [6–11], использование вариационно-разностного метода (ВРМ) предполагает разбиение расчетной трехмерной области, занимаемой резиновыми слоями и армирующими стальными пластинками конечно-разностной сеткой. В известной литературе практически нет упоминаний о необходимом числе точек сетки вариационно-разностного разбиения расчетной области для тонких слоев, но, исходя из аналогичных рекомендаций по методу конечного элемента, в зоне расположения стальной армирующей пластинки должно быть не менее 2-, 3-х узлов МКЭ модели, по аналогии, примем такое же число точек и для вариационно-разностного разбиения. При выполнении расчетов использовалась аппроксимация двумя слоями сетки ВРМ в пределах стальных слоев.

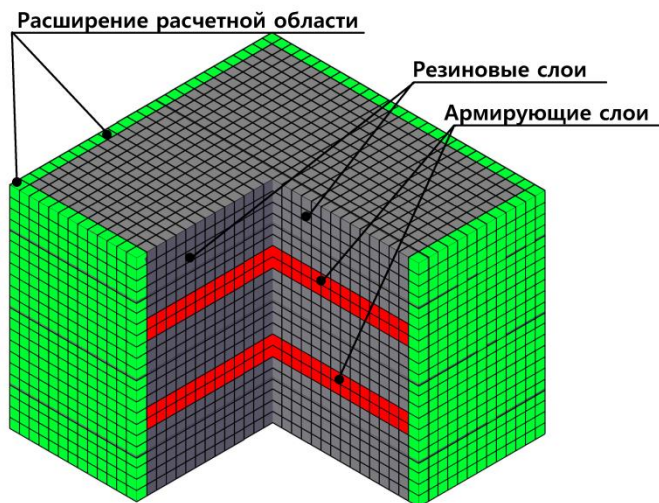


Рис. 4. Разбиение трехмерной области, занимаемой слоистым резинометаллическим виброизолятором, на конечно-разностную сетку

Figure 4. Partitioning of the three-dimensional region occupied by the layered rubber-metal vibration isolator on a finite-difference mesh

Верхняя и нижняя плоскости расчетной модели виброизолятора закреплены от горизонтальных перемещений, нижняя грань ограничена также и в вертикальных перемещениях, а верхняя грань виброизолятора испытывает осадку. С целью предотвращения влияния «законтурных точек» трехмерная область, ограниченная телом, расширена на один слой вариационно-разностной сетки с каждой из сторон (отсутствие материала моделируется путем задания модуля упругости тела приближенно равным нулю).

В основе вариационно-разностного метода лежит замена вариационного функционала на его дискретный конечно-разностный аналог. В случае решения трехмерной задачи теории упругости конечно-разностная аппроксимация функционала Лагранжа будет иметь вид [8]:

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^L \left(\frac{1}{2} E_{i,j,k} \nu_{i,j,k} \left(\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{dx} + \frac{v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k}}{dy} + \frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}}{dz} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} E_{i,j,k} \left(\left(\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k}}{dy} \right)^2 + \left(\frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}}{dz} \right)^2 \right) + \\ & + \frac{E_{i,j,k}}{4(1+\nu_{i,j,k})} \left(\left(\frac{v_{i,j,k+1} - v_{i,j,k}}{dz} + \frac{w_{i,j+1,k} - w_{i,j,k}}{dy} \right)^2 + \left(\frac{w_{i+1,j,k} - w_{i,j,k}}{dx} + \frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}}{dz} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k}}{dy} + \frac{v_{i+1,j,k} - v_{i,j,k}}{dx} \right)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

где:

$E_{i,j,k}, \nu_{i,j,k}$ – значение модуля упругости материала и значение коэффициента Пуассона в i, j, k -й точке трехмерной области;

$u_{i,j,k}; v_{i,j,k}; w_{i,j,k}$ – перемещения i, j, k -й точки под действием приложенных граничных условий;

$dx; dy; dz$ – шаг по соответствующей координате (вдоль осей OX, OY и OZ).

Фактически развивающееся в резинометаллическом виброизоляторе напряженно-деформированное состояние соответствует условию достижения минимального значения этим функционалом, то есть для каждой i, j, k -й точки данной трехмерной области должно выполняться равенство нулю соответствующей производной отдельных компонент конечно-разностной суммы:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{i,j,k}}{\partial u_{i,j,k}} &= 0; & \frac{\partial \Pi_{i,j,k}}{\partial v_{i,j,k}} &= 0; & \frac{\partial \Pi_{i,j,k}}{\partial w_{i,j,k}} &= 0, \end{aligned} \right.$$

где $\Pi_{i,j,k}$ – выражение для конечно-разностной аппроксимации функционала Лагранжа в i, j, k -й точке; $u_{i,j,k}; v_{i,j,k}; w_{i,j,k}$ – перемещения i, j, k -й точки под действием приложенных граничных условий.

Конечно же, в каждое из уравнений вариационно-разностного метода не входят все компоненты конечно-разностного аналога, а лишь ближайшие к точке дифференцирования. Внешний вид конечно-разностного шаблона для поиска производной от функционала Лагранжа в трехмерной области, занимаемой телом, приводится на рис. 5.

Далее данную систему уравнений возможно решать любым известным численным методом, в рамках рассматриваемой статьи рассматривается наиболее просто реализуемый на практике итерационный метод Зейделя. Общая схема метода Зейделя позволяет получать более точное значение на каждой последующей итерации с учетом уже найденных значений искомой величины в других точках расчетной области на данном шаге итерации и предыдущих итерациях. Эта особенность метода в ряде случаев позволяет достичь значительно большей скорости сходимости итерационного процесса по сравнению, например, с методом простой итерации, либо различными модификациями метода релаксации. Более подробно с вопросом численного решения больших систем уравнений можно ознакомиться в литературе [6–9].

Конечно-разностное дифференцирование функционала возможно произвести как численным способом, непосредственно вычисляя значение функционала для двух близких значений соответствующей компоненты вектора перемещений в i, j, k -й точке, так и с использованием предварительного аналитического дифференцирования конечно-разностного аналога функционала с использованием систем символьной математики. Использование аналитического

дифференцирования позволяет сократить ошибки округления при реализации итерационного процесса, и, таким образом, способствует ускорению сходимости метода Зейделя.

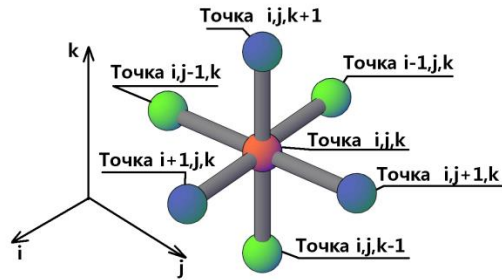


Рис. 5. Шаблон конечно-разностного дифференцирования функционала Лагранжа в трехмерной области (использована аппроксимация «вперед» для вариационно-разностного аналога), показаны связанные дифференциальной связью точки трехмерной области, занимаемой телом виброизолятора

Figure 5. Template of finite-difference differentiation of the Lagrangian functional in the three-dimensional domain (the “forward” approximation for the variational-difference analog is used), the points of the three-dimensional domain occupied by the body of the vibration isolator are shown connected by the differential connection

Решение трехмерной задачи теории упругости осуществляется в перемещениях, далее после определения всех трех компонент перемещения u , v , w во всех точках рассматриваемой расчетной области, занимаемой виброизолятором, производится вычисление деформаций (на основе соотношений Коши) и далее уже на основе известных соотношений закона Гука определяются искомые напряжения. Наибольший интерес для практики представляют именно компоненты напряжения σ_{zz} , так как их интегральная сумма по всей верхней грани слоистого резинометаллического виброизолятора позволяет определить наиболее важный для практики параметр виброизолятора — его грузоподъемность, также определенную ценность представляют компоненты σ_{xx} и σ_{yy} для определения напряжений в стальных армирующих слоях.

Для решения описанной задачи была составлена программа на языке программирования Fortran, результаты работы данной программы визуализированы с использованием программ, входящих в состав среды Anaconda (язык Python). Часть программного модуля в автоматическом режиме генерирует координаты точек расположения отверстий и их габариты кратно шагу сетки вариационно-разностного метода, остальная часть программного модуля осуществляет многократное решение трехмерной задачи теории упругости с сохранением в памяти значения грузоподъемности виброизолятора в зависимости от координат центров отверстий и их радиусов.

Приняты следующие габариты виброизолятора:

- размеры виброизолятора в плане 480×480 мм;
- высота резиновых слоев (каждого) 40 мм;
- толщина стальных армирующих пластинок принята равной 10 мм.

Материал армирующих стальных пластинок Ст-3 (модуль упругости $E = 220$ ГПа, коэффициент Пуассона 0,3), упругие резиновые слои (модуль упругости $E = 5,0$ МПа, коэффициент Пуассона 0,492). Для моделирования перфораций применялся прием кратного (более чем в 10^6 раз) уменьшения модуля упругости материала, расположенного в пределах тех частей вариационно-разностной сетки, где размещена перфорация. Такой подход может привести к некоторому замедлению процесса сходимости итерационного метода Зейделя, однако позволяет более простым способом реализовать алгоритм решения задачи, так как позволяет рассматривать задачу на всем прямоугольнике, занимаемом виброизолятором в плане, без программного исключения отдельных элементов расчетной области. Как показали результаты расчета, такой подход не приводит к критическому снижению скорости сходимости по сравнению с виброизолятором без отверстий.

Внешний вид рассмотренных слоистых виброизоляторов представлен на рис. 6.

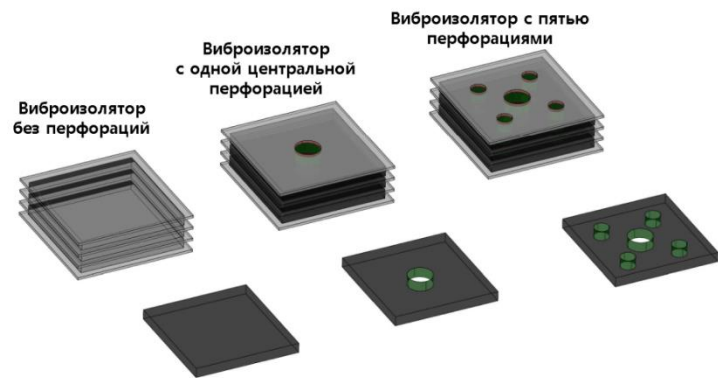


Рис. 6. Трехслойные виброизоляторы без перфораций, с одной и пятью перфорациями (радиус центрального отверстия 50 мм, а крайних отверстий — 30 мм)
Figure 6. Three-layer vibration isolators without perforations, with one and five perforations (the radius of the central hole is 50 mm and the radius of the outer holes is 30 mm)

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

На рис. 7–10 приводятся компоненты перемещений внутри рассматриваемой области, занимаемой виброизолятором. Видно, что наибольшие перемещения наблюдаются в пределах резиновых слоев. Стальные армирующие слои практически не подвержены деформациям (деформации на много порядков меньше деформаций резиновых слоев).

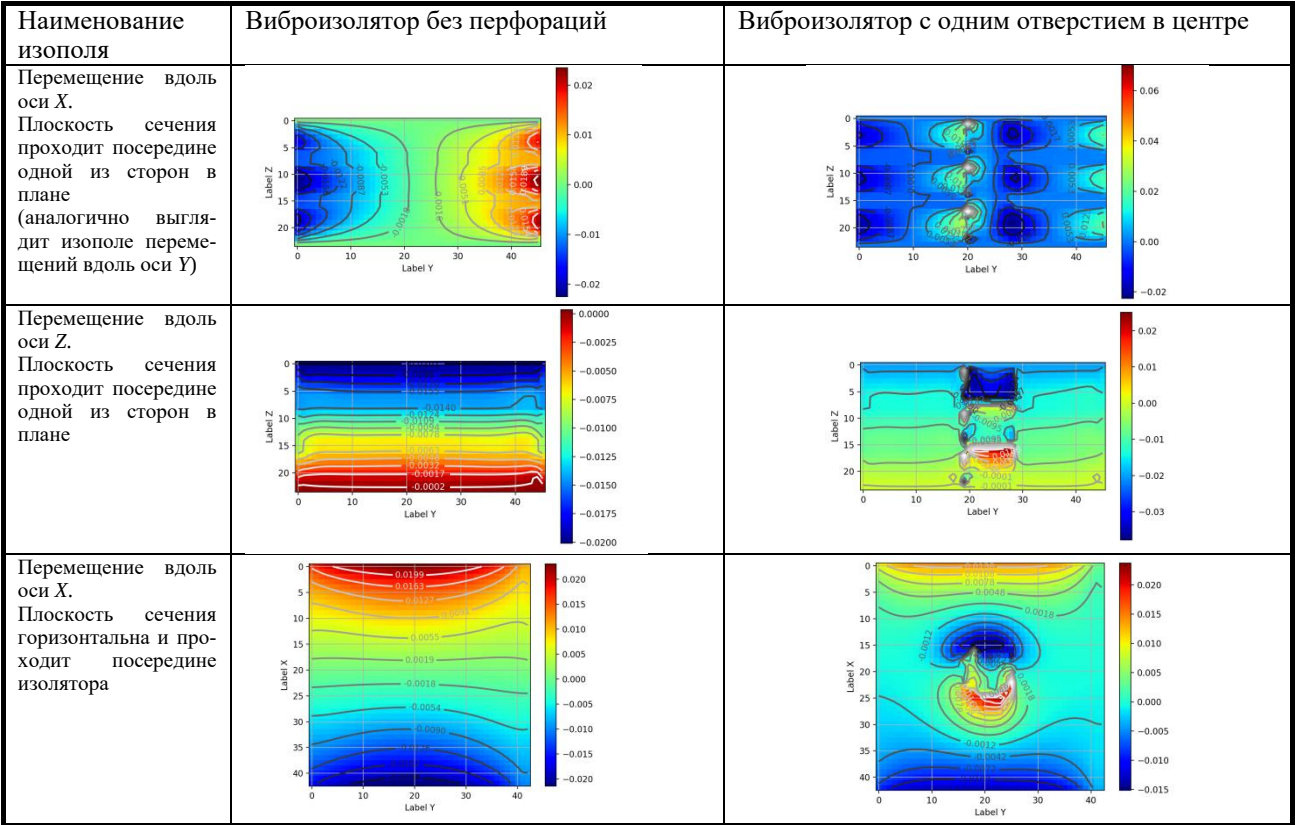


Рис. 7. Характерные изополя перемещений, м, внутри конструкций резинометаллических виброизоляторов без перфораций и с отверстиями
Figure 7. Characteristic displacement isopoles, m, inside the structures of rubber-metal vibration isolators without perforations and with holes

Следующие изополя иллюстрируют изменение компонент тензора деформаций внутри трехслойного виброизолятора.

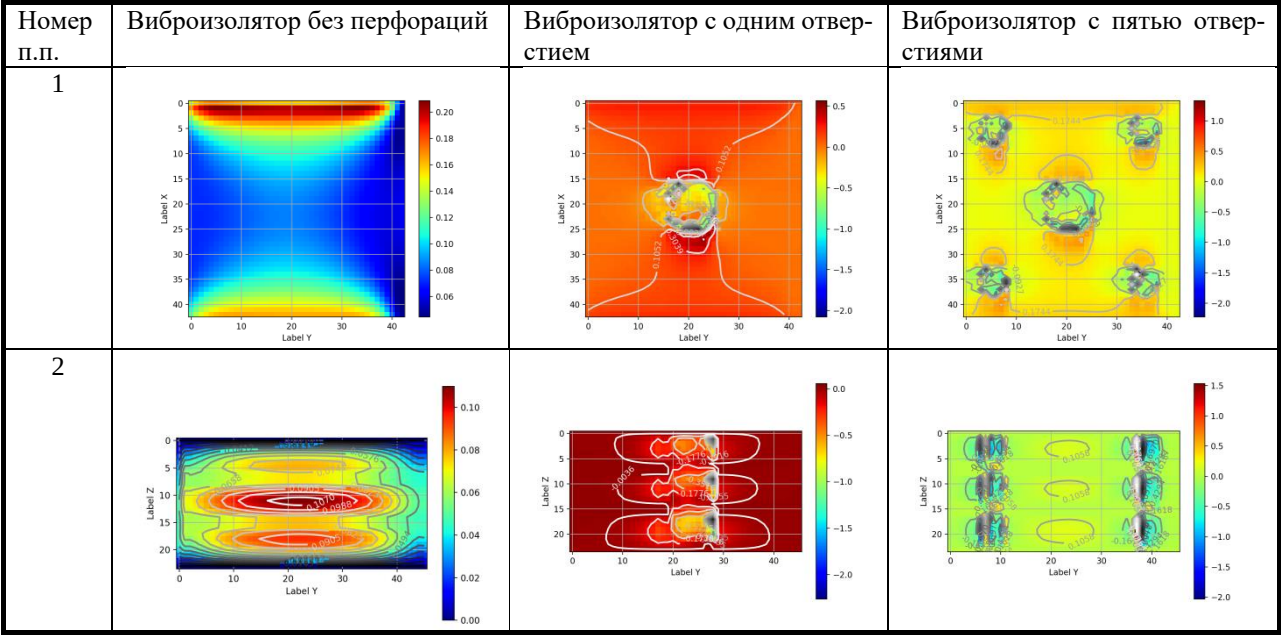


Рис. 8. Характерные изополя деформаций внутри конструкций резинометаллических виброизоляторов без перфораций и с отверстиями

Figure 8. Characteristic isopoies of deformations inside the structures of rubber-metal vibro-isolators without perforations and with holes

На рис. 8 в первой строке приводятся изополя деформаций ϵ_{xx} для секущей плоскости параллельной горизонтальной поверхности, во второй строке напряжения приведены для сечения виброизолятора вертикальной плоскостью, проходящей через середину стороны для полнотелого изолятора и изолятора с одним отверстием и через центры крайних отверстий для виброизолятора с пятью отверстиями.

Помимо перемещений и деформаций большой интерес представляют компоненты напряжений, в частности, из полученного решения видно, что при значительных размерах перфораций в резинометаллических виброизоляторах зона всестороннего сжатия значительно уменьшается, особое влияние на ее уменьшение оказывают отверстия, расположенные ближе к краям резинового слоя.

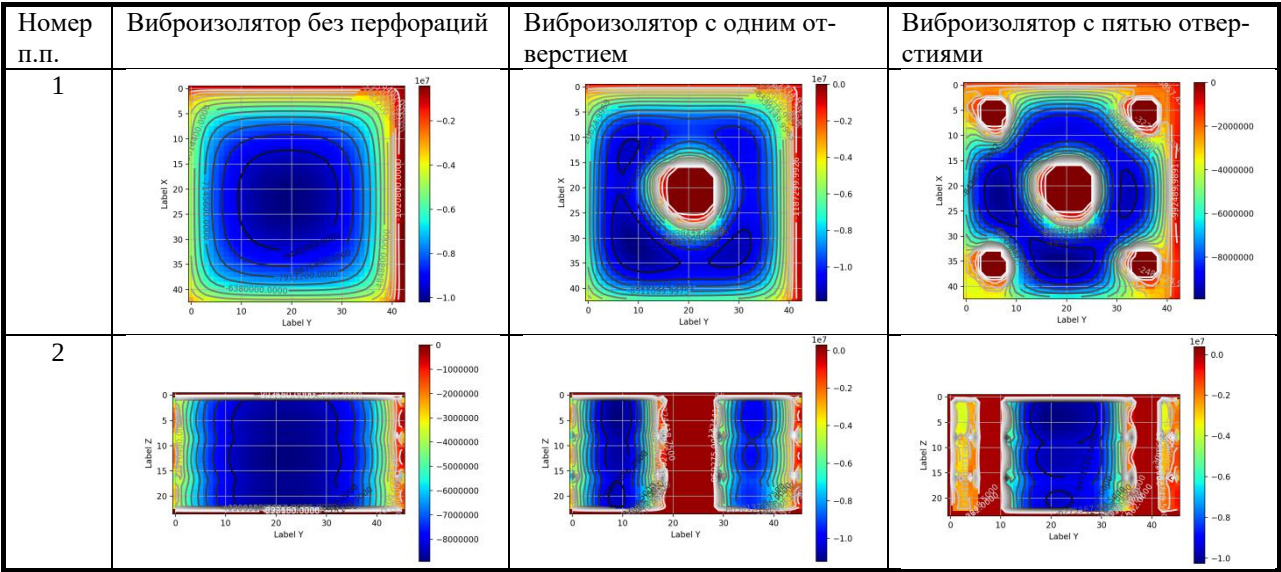


Рис. 9. Уменьшение зоны всестороннего сжатия в резинометаллическом виброизоляторе

Figure 9. Reduction of all-round compression zone in rubber-metal vibration isolator

На рис. 9 прохождение секущих плоскостей принято аналогично рис. 8.

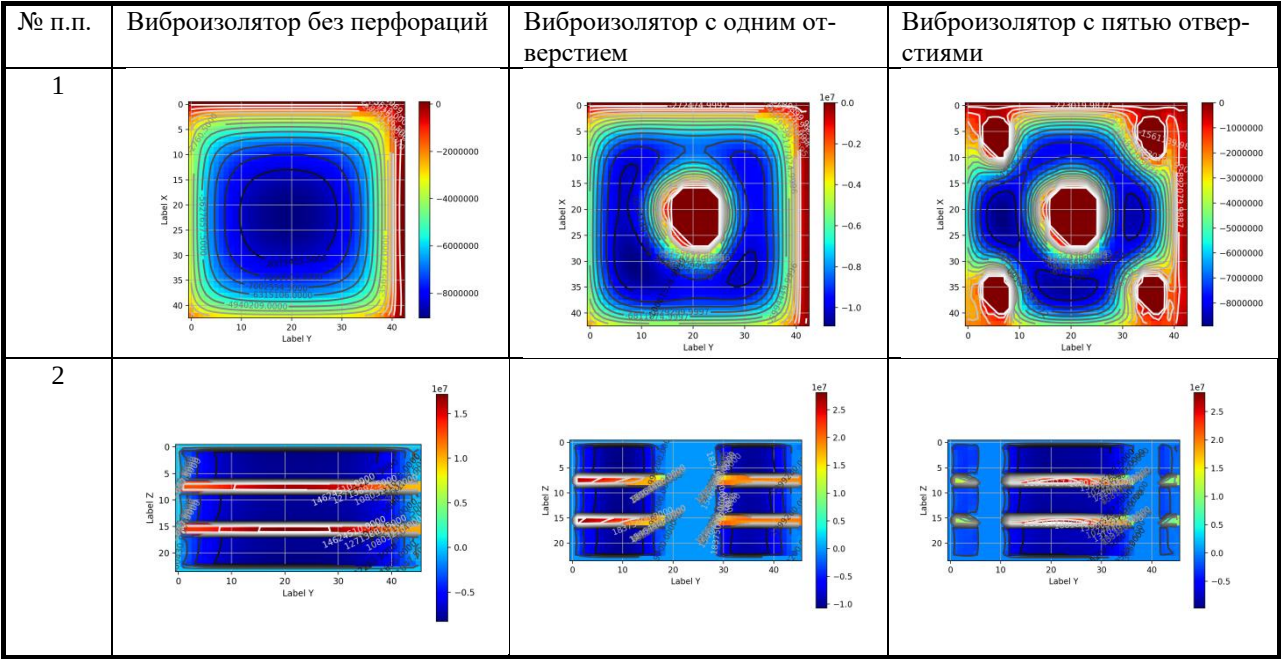


Рис. 10. Компоненты напряжений σ_{xx} (видны значительные концентрации напряжений в пределах стальных армирующих пластин)

Figure 10. Stress components σ_{xx} (significant stress concentrations within the steel reinforcement plates can be seen)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате расчетов получены следующие значения грузоподъемности рассмотренных в статье виброизоляторов:

- для виброизолятора без отверстий грузоподъемность составила 128,80 тс;
- для виброизолятора с одним отверстием радиусом 50 мм в центре грузоподъемность составила 85,59 тс;
- для виброизолятора с пятью отверстиями грузоподъемность критически уменьшилась до величины 58,48 тс.

Следует отметить, что найденные грузоподъемности соответствуют одной и той же осадке виброизоляторов, равной 20,1 мм. Как известно, первая собственная частота упругого тела, подверженного осадке f_{cm} , возникающей под действием приложенного груза, равна:

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{f_{cm}}},$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, то есть является одинаковой для виброизоляторов всех трех конструктивных форм. Как показал ранее выполненный модальный анализ, произведенный дополнительно в программном комплексе, реализующем МКЭ, собственные частоты трехслойных виброизоляторов равны 4,44, 4,37 и 4,37 Гц соответственно для виброизоляторов без отверстий, с одним отверстием и с пятью отверстиями. Из этого обстоятельства следует, что само по себе наличие перфораций в пределах резиновых и армирующих слоев не приводит к существенному возрастанию виброзащитных свойств виброизоляторов, способствует лишь уменьшению их материалоемкости (при одинаковой величине осадки). Однако наличие пяти отверстий приводит уже к снижению грузоподъемности виброизолятора более

чем на 54,6 % (при той же величине осадки). Фактически для восприятия веса здания потребуется большее число виброизоляторов с перфорациями, что приведет к увеличению затрат на выполнение железобетонных конструкций для их размещения. Таким образом, возникает необходимость решения технико-экономической задачи, заключающейся в нахождении оптимального соотношения экономической целесообразности снижения стоимости самих виброизоляторов и возрастающей при этом стоимости устройства железобетонных конструкций в уровне виброизоляционного шва. Использование перфорированных виброизоляторов рекомендуется в том случае, если предельная величина осадки виброизолятора не лимитирована, в этом случае перфорации позволяют с учетом значительного снижения грузоподъемности получить высокие виброзащитные свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дашевский М.А., Ковальчук О.А., Мондрус В.Л. Влияние поездного состава метрополитена на поведение крупнопанельных зданий повышенной этажности // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений (ССБС). М., 2004. № 3.
2. Дашевский М.А., Мондрус В.В., Моторин В.В., Сизов Д.К. Виброзащита зданий. М. : Из-во ООО «Сам Полиграфист», 2021. 252 с.
3. Дашевский М.А., Моторин В.В., Акимова И.В. Формирование напряженного состояния виброизолируемого здания в процессе монтажа резинометаллических виброизоляторов // Вестник МГСУ. 2015. № 12.
4. Мондрус В.Л., Сизов Д.К., Хуэн Л.Т.Т. Снижение уровня сейсмического воздействия при движении грунта основания с использованием сейсмоизоляторов // Строительные материалы, оборудование, технологии XIX века. 2011. № 1 (144). С. 48–49.
5. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/Nastran for Windows. М. : ДМК Пресс, 2003. 448 с.
6. Тиртышников Е.Е. Методы численного анализа. М. : Издательский центр «Академия», 2006. 320 с.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы. М. : Наука, 1986.
8. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М. : Наука, 1970. 512 с.
9. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М. : Высшая школа, 1994.
10. Симбиркин В.Н., Панасенко Ю.В., Курнавин В.В. Сравнительный анализ применения различных моделей демпфирования при расчете сейсмической реакции сооружений в ПК STARK ES // Железобетонные конструкции. 2023. № 2 (2). С. 58–64.
11. Мондрус В.Л., Сизов Д.К., Квасников Т.М. Расчет резинометаллических виброизоляторов с отверстиями в системе виброзащиты зданий с помощью программного комплекса, реализующего метод конечных элементов // Железобетонные конструкции. 2023. № 4 (4) С. 43–51.

REFERENCES

1. Dashevskiy M.A., Kovalchuk O.A., Mondrus V.L. Influence of the subway train on the behavior of large-panel buildings of increased storey. *Seismic Construction. Safety of Structures*. 2004; 3.
2. Dashevskiy M.A., Mondrus V.V., Motorin V.V., Sizov D.K. *Vibration protection of buildings*. Moscow, OOO Sam Polygraphist, 2021; 252.
3. Dashevskiy M.A., Motorin V.V., Akimova I.V. Formation of the stressed state of the vibro-isolated building in the process of installation of rubber-metal vibration isolators. *Vestnik MGSU*. 2015; 12.
4. Mondrus V.L., Sizov D.K., Huen L.T.T. Reduction of the seismic impact level at the base soil movement with the use of seismic isolators. *Building materials, equipment, technologies of the XIX century*. 2011; 1(144):48-49.
5. Shimkovich D.G. *Calculation of Structures in MSC/Nastran for Windows*. Moscow, DMK Press, 2003; 448.
6. Tyrtysnikov E.E. *Methods of numerical analysis*. Moscow, Publishing center "Academy", 2006; 320.
7. Bakhvalov N.P. *Numerical methods*. Moscow, Nauka, 1986.
8. Mikhlin P.G. *Variational methods in mathematical physics*. Moscow, Nauka, 1970; 512.
9. Amosov A.A., Dubinsky Y.A., Kopchenova N.V. *Computational Methods for Engineers*. Moscow, Higher School, 1994.
10. Simbirkin V.N., Panasenکو Yu.V., Kurnavin V.V. Analysis of Various Damping Models in The Simulation of the Seismic Response of Structures in the STARK ES Software. *Reinforced concrete structures*. 2023; 2(2):58-64.
11. Mondrus V.L., Sizov D.K., Kvasnikov T.M. Finite Element Modelling of Rubber-Metal Vibration Isolators with Holes for the Vibration Protection System of Buildings. *Reinforced concrete structures*. 2023; 4(4):43-51.