



УДК 539.313:624.074:517.958:514.77:531.43

DOI: 10.22227/2949-1622.2025.2.41-57

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ/RESEARCH ARTICLE

Обобщенная теория балки Эйлера – Бернулли с возвратным потенциалом

В.А. Нецадимов^{1*}¹ *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, Российская Федерация*

*expertor@internet.ru

Ключевые слова: теория балки Эйлера – Бернулли, геометрическая нелинейность, возвратный потенциал, аналитические решения задач геометрической нелинейности, обобщенная теория балки, топологическое пространство, топологическая абсцисса, строительная механика

История статьи

Поступила в редакцию: 30.05.2025

Доработана: 05.06.2025

Принята к публикации: 07.06.2025

Для цитирования

Нецадимов В.А. Обобщенная теория балки Эйлера – Бернулли с возвратным потенциалом // Железобетонные конструкции. 2025. Т. 10. № 2. С. 41–57.

Аннотация. В 1749 г. Л. Эйлер, опираясь на идеи Якоба и Даниила Бернулли, сформулировал теорию балки в точной постановке с гипотезой плоских сечений. Позднее П.-С. Жирар линейризовал кривизну, упростив получение аналитических решений, а Б.П.Э. Клапейрон выразил ее через производные функции прогиба. В результате модель Эйлера – Бернулли разделилась на два класса: линейную (классическую) постановку с кривизной Жирара и так называемую «точную» геометрически нелинейную постановку с кривизной Эйлера – Клапейрона. В настоящей работе показано, что класс геометрически нелинейных задач является методологическим заблуждением. Функция $u(x)$, традиционно интерпретируемая как прогиб, представляет собой развертку топологического пространства на плоскость в декартовой системе и отображает расстояние от топологической абсциссы до нейтральной оси деформированной балки. Начальный участок абсциссы близок к прямолинейному, что оправдывает использование классической модели при малых деформациях. Однако при больших деформациях даже «точная» формула кривизны оказывается некорректной. Введен новый силовой фактор — возвратный потенциал P , который замыкает систему уравнений и связывает углы поворота с внешней поперечной нагрузкой. Обобщение теории балки в прямолинейной и криволинейной (топологической) системах координат с обобщенной переменной i позволило установить глубокую связь между этими расчетными пространствами и восстанавливать точную геометрию балки на основе классических решений Эйлера – Бернулли. Таким образом, работа завершает фундаментальную задачу Якоба Бернулли (1694), в которой линейность и гипотеза плоских сечений сохраняются на всем диапазоне упругой работы.

Generalized Euler – Bernoulli Beam Theory with Return Potential

V.A. Neshchadimov^{1*}¹ *Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), Moscow, Russian Federation*

*expertor@internet.ru

Виктор Александрович Нецадимов, канд. техн. наук, ст. преподаватель кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 4558-1454, ResearcherID: HTS-6654-2023, ORCID: 0009-0006-3368-0905, E-mail: expertor@internet.ru

© Нецадимов В.А., 2025



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Keywords: Euler – Bernoulli beam theory, geometrical nonlinearity, restoring potential, analytical solutions to geometrically nonlinear problems, generalized beam theory, topological space, topological abscissa, structural mechanics

Article history

Received: 30.05.2025

Revised: 05.06.2025

Accepted: 07.06.2025

For citation

Neshchadimov V.A. Generalized Euler – Bernoulli Beam Theory with Return Potential. *Reinforced Concrete Structures*. 2025; 2(10):41-57.

Abstract. In 1749, L. Euler, building on the ideas of Jakob and Daniel Bernoulli, formulated beam theory in an exact formulation with the hypothesis of plane sections. Later, P.-S. Girard linearized the curvature, simplifying the derivation of analytical solutions, and B.P.E. Clapeyron expressed it in terms of derivatives of the deflection function. As a result, the Euler – Bernoulli model split into two classes: the linear (classical) formulation with Girard’s curvature and the so-called “exact” geometrically nonlinear formulation with Euler – Clapeyron curvature.

This work demonstrates that the class of geometrically nonlinear problems is a methodological fallacy. The function $y(x)$, traditionally interpreted as the deflection function, is in fact a mapping of a topological space onto a plane in the Cartesian system and describes the distance from the topological abscissa to the neutral axis of the deformed beam. The initial segment of the topological abscissa is nearly rectilinear, which justifies the use of the classical model for small deformations. However, for large deformations, even the “exact” curvature formula proves to be incorrect.

A new force component — the restoring potential P — is introduced, which closes the system of equations and links the rotation angles to the external transverse load. The generalization of beam theory in rectilinear and curvilinear (topological) coordinate systems using a generalized variable i has revealed a deep connection between these computational spaces and enables the reconstruction of the exact geometry of the deformed beam based on classical Euler – Bernoulli solutions.

Thus, this work resolves the fundamental problem posed by Jakob Bernoulli (1694), establishing a generalized beam theory in which linearity and the hypothesis of plane sections are preserved throughout the entire range of elastic behavior.

ВВЕДЕНИЕ

В 1694 г. Якоб Бернулли [1–4] сформулировал фундаментальную задачу изгиба балки, предложив использовать понятие изгибающего момента — концепцию, без которой современная теория балок была бы невозможна.

Даниил Бернулли [5–7] внес ключевой вклад, сформулировав гипотезу плоских сечений и принцип суперпозиции. Эти идеи легли в основу аналитических моделей, позволив описывать деформации балки строгими математическими средствами.

На основе этих достижений Леонард Эйлер в 1744 г. разработал теорию балки в точной геометрически нелинейной постановке [8]. Эта теория задавала высочайший стандарт строгости и глубины математического описания, остававшийся недостижимым для многих последователей.

Позднее Пьер-Симон Жирар [9] упростил уравнения Эйлера, линеаризовав кривизну балки в прямолинейной системе координат как $\kappa(x) = y''(x)$, и тем самым фактически исправил допущение Эйлера о свободной деформации балки в продольном направлении. До настоящего времени, включая суждение самого Жирара, считалось, что это преобразование основано на допущении малых углов поворота ($y' \ll 1$), которое позволяет получать простые линейные, но приближенные решения. В настоящей работе аналитически показано, что между кривизной и второй производной функции прогиба в прямолинейной системе координат существует точная линейная зависимость при условии продольной фиксации балки.

Victor A. Neshchadimov, Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4558-1454, ResearcherID: HTS-6654-2023, ORCID: 0009-0006-3368-0905, E-mail: expertor@internet.ru

Монография [9] была высоко оценена английским математиком Исааком Тодхантером, который писал [10]:

«Эта работа весьма удачно завершает труды XVIII века. Это первый практический трактат по упругости; и одна из первых попыток провести исследовательские эксперименты по упругим свойствам балок. Она ценна не только тем, что содержит все знания того времени по этому предмету, но также и по причине замечательного исторического введения...»

По замечанию рецензента, работа была начата в 1787 г., ее части представлены в Академию в 1792 г., а окончательная публикация отложена до завершения серии экспериментальных исследований упругих тел, проведенных в Гавре.

Однако гениальность Эйлера проявилась в том, что, определяя радиус кривизны в прямолинейной системе координат (подход, который, как показано в настоящей работе, имеет ограничения и который сам Эйлер рассматривал с оговоркой $dx \approx \text{const}$), он также предложил альтернативное представление кривизны балки в криволинейной системе координат в виде производной угла наклона касательной по длине дуги: $\kappa(s) = -\theta'(s)$. Эта точная формулировка легла в основу настоящего исследования и используется для построения аналитических решений для балок, свободных в продольном направлении.

В первой четверти XIX в. Луи Мари Анри Навье [11] сделал принципиальное расширение модели Эйлера, введя понятие поперечной силы и связав ее с производной изгибающего момента. Этот шаг существенно обогатил теорию и расширил ее возможности.

Бенуа Поль Эмиль Клапейрон [12] обобщил идеи Эйлера и Навье, переписав уравнения равновесия с учетом соотношений Навье и выразив их через кривизну $\kappa(x)$. Эта работа стала важным этапом в систематизации и распространении теории балки, хотя по существу являлась интерпретацией строгой постановки Эйлера с использованием понятий, введенных Навье.

Следует отметить, что даже в строгой геометрически нелинейной постановке радиус кривизны задается с допущением, которое ограничивает продольные перемещения балки. Однако гениальность Эйлера заключалась в том, что также в качестве альтернативы он связал кривизну балки в криволинейной системе координат с производной угла наклона касательной по длине дуги. Эта точная формулировка легла в основу настоящей работы и используется для построения аналитических решений.

Настоящая работа представляет собой обобщение теории балки Эйлера – Бернулли, рассмотренной одновременно в двух расчетных пространствах: прямолинейном (декартовом) и криволинейном (топологическом). Показано, что функция $y(x)$, традиционно интерпретируемая как «функция прогиба», в действительности представляет собой развертку топологического пространства деформированной балки из криволинейной системы координат на прямолинейную ось. Эта развертка хранит закодированную информацию об углах поворота сечений, кривизне и внутренних усилиях, выступая посредником между локальной геометрией и глобальной формой конструкции.

В новой парадигме становится очевидно: классическая теория Эйлера – Бернулли решается не в физическом пространстве, а в абстрактном топологическом пространстве, которое хранит полную информацию о деформированном состоянии балки. Здесь поперечная нагрузка $q(x)$, Н/м, выступает не просто как сила на единицу длины, а как величина с размерностью пространства (-1) -й степени — своеобразная «топологическая плотность» внешнего воздействия. Каждая последующая производная функции прогиба $y(x)$ поднимает нас на следующую ступень иерархии:

- $dy^{(4)} \sim q(x)$: поперечная нагрузки в пространстве (-1) , размерность $\text{Н} \cdot \text{м}^{-1}$;
- $dy^{(3)} \sim Q(x)$: поперечная сила, $\text{Н} \cdot \text{м}^0$;
- $dy''(x) \sim M(x)$: изгибающий момент, $\text{Н} \cdot \text{м}^1$;
- $dy'(x) \sim P(x)$: возвратный потенциал, $\text{Н} \cdot \text{м}^2$.

Таким образом, функция $y(x)$ — это не просто график прогиба, а проекция (или развертка) топологического пространства на прямолинейную (декартову) систему координат, как уже отмечалось ранее. Введенный возвратный потенциал $P(x)$ играет ключевую роль: он соединяет два расчетных пространства, выступает своеобразным рубиконом между силовыми и деформационными характеристиками деформированной балки и замыкает систему уравнений, формируя целостную модель ее деформации. Более того, возвратный потенциал, являясь дифференциальным силовым фактором, реализует принцип Гука для изгиба, напрямую связывая угол поворота сечения — геометрическую величину — с силовым воздействием.

МЕТОД

На основе достижений предшественников [1–12] и их подходов уравнения равновесия теории балки Эйлера – Бернулли могут быть записаны в дивергентной форме:

$$\begin{aligned} EI \cdot \kappa(i) - M(i) &= 0; \\ EI \cdot \kappa'(i) - Q(i) &= 0; \\ EI \cdot \kappa''(i) + q(i) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где EI — изгибная жесткость; $\kappa(i)$, $M(i)$, $Q(i)$ и $q(i)$ — соответственно кривизна, изгибающий момент, поперечная сила и распределенная поперечная нагрузка в рассматриваемом сечении балки. Система координат i может быть как прямолинейной ($i = x$, декартовой, через проекцию на ось x), так и криволинейной ($i = s$ по деформированной нейтральной оси s).

Уравнения (1) линейны в рассматриваемых системах координат относительно кривизны балки $\kappa(i)$, которая определяется по-разному в разных системах отсчета:

$$\kappa(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{-dxddy}{ds^2} = -\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = -\frac{d^2y}{dx^2}; \quad (2)$$

$$\kappa(s) = -\frac{d\theta}{ds}, \quad (3)$$

где $R(x)$ — радиус кривизны деформированной оси балки; $(-dxddy)/ds^2$ — определение кривизны, предложенное Эйлером [8] в прямолинейной системе координат; dx — приращение координаты x ; ddy — устаревшее обозначение второй производной d^2y (в современном анализе обычно записывается как y''); $ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ — квадрат дифференциала дуговой длины (определяемого по теореме Пифагора с допущением $dx \approx \text{const}$, как отмечал сам Эйлер); $-y''/(1+(y')^2)^{3/2}$ — выражение кривизны, полученное Клапейроном [12] из формулы Эйлера и выраженное через производные функции прогиба $y(x)$; $-d^2y/dx^2$ — выражение кривизны, предложенное Жираром [9]; $-d\theta/ds$ — линейная формула кривизны в криволинейной системе координат, полученная Эйлером [8].

При использовании прямолинейной системы координат функция $y(x)$, обычно интерпретируемая как функция прогиба, в действительности не описывает истинную форму деформированной балки. Точное расчетное положение деформированной балки в общем случае определяется только параметрически в естественной криволинейной системе координат по формулам Жана Фредерика Френе [13]:

$$\begin{cases} x(s) = \int_0^s \frac{dx(\xi)}{ds} d\xi = \int_0^s \cos(\theta(\xi)) d\xi; \\ y(s) = \int_0^s \frac{dy(\xi)}{ds} d\xi = \int_0^s \sin(\theta(\xi)) d\xi \end{cases}, \quad (4)$$

где s — длина деформированной нейтральной оси; $\theta(\xi)$ — угол поворота.

Она является разверткой кривизны деформированной балки по длине нейтральной криволинейной оси s на прямолинейную ось x .

В результате двойного интегрирования функции кривизны как в прямолинейной, так и в криволинейной системе координат мы получаем линейную функцию $y(i)$, которая посредством двойного дифференцирования вернет нам обратно функцию кривизны $\kappa(i)$:

$$[1] \quad y(i) = \iint \kappa(\xi) d\xi \quad (5)$$

Если интерпретировать $y(x)$ как функцию прогиба балки и с ее помощью попытаться определить кривизну, то в классической теории потребуется так называемая «точная» формула кривизны Эйлера – Клапейрона:

$$\kappa(x) = -\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2 \right]^{-(3/2)}. \quad (6)$$

Эта формула позволяет, используя производные функции $y(x)$, вычислить кривизну в точке с координатой x . Однако важно подчеркнуть, что после деформации рассматриваемая точка x оказывается в ином положении в пространстве. Таким образом, кривизна $\kappa(x)$, вычисленная по формуле (6), отражает физическую кривизну балки в криволинейной системе координат s , но основана на абстрактной функции, геометрический смысл которой будет подробно раскрыт в следующем разделе настоящей статьи. В отличие от этого, в криволинейной системе координат между кривизной $\kappa(s)$ и деформацией балки существует строгая линейная зависимость на всем диапазоне упругой работы (см. формулу Эйлера (3)):

$$\kappa(s) = -\frac{d^2 y(s)}{ds^2}, \quad (7)$$

Таким образом, формула (6) учитывает искажения, возникающие в результате двойного интегрирования кривизны в декартовой системе координат (см. формулу (5) при $i = x$), а не отражает так называемую «геометрически нелинейную работу» балки. Задача изгиба балки как была линейной, так и остается таковой после «линеаризации кривизны»: Жирар фактически выпрямил криволинейную систему координат и получил точные значения кривизны в криволинейной системе координат в точке s по координате x .

Возвращаясь к этой математической абстракции $y(x)$ и принимая во внимание, что в криволинейной системе координат существует линейная зависимость (7), можно повторить математическую шутку Эйлера, подхваченную Клапейроном, пойти еще дальше и предложить формулу для восстановления кривизны $y(x)$ через другую абстрактную функцию $Y(x)$, полученную трехкратным интегрированием кривизны:

$$\kappa(x) = -\frac{\frac{d^3 Y(x)}{dx^3} \cdot \left[1 + \left(\frac{dY(x)}{dx} \right)^2 \right] - 3 \frac{dY(x)}{dx} \left(\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right)}{\left[1 + \left(\frac{dY(x)}{dx} \right)^2 \right]^{(5/2)}}. \quad (8)$$

Функция $Y(x)$ определяется как: $Y(x) = \iiint \kappa(\xi) d\xi$. В криволинейной системе координат эта функция $Y(s)$ возвращает кривизну из третьей производной: $\kappa(s) = -\frac{d^3 Y(s)}{ds^2}$.

Таким образом, с появлением формулы (8) можно говорить о возникновении нового класса задач — *геометрической супернелинейности*. Однако есть все основания полагать, что данный класс задач долго не просуществует, поскольку достаточно быстро найдется исследователь, который, подобно Жирану, выполнит суперлинеаризацию супернелинейной задачи. Упростив уравнение (8), он положит нулевыми первые две производные функции $Y(x)$ и тем самым получит приближенное (а на самом деле — точное) значение кривизны в виде: $\kappa(x) = -\frac{d^3 Y(x)}{dx^2}$.

Исходя из изложенного, целесообразно переписать уравнения равновесия теории балки Эйлера – Бернулли относительно физически наглядной неизвестной — угла наклона сечения $\theta(i)$, который в прямолинейной и криволинейной системах координат линейно связан с кривизной балки. При этом используется современная система знаков: абсцисса $y(i)$ в горизонтальной балке направлена вниз, совпадая с направлением положительной поперечной нагрузки и вызывая положительные деформации; изгибающий момент считается положительным, если нижние волокна балки испытывают растяжение:

$$\kappa(i) = \frac{d\theta(i)}{di}.$$

Это позволяет сделать еще одно обобщение более низкого уровня и переписать уравнения равновесия в терминах угла поворота $\theta(i)$:

$$EI \cdot \theta'(i) + M(i) = 0;$$

$$EI \cdot \theta''(i) + Q(i) = 0;$$

$$EI \cdot \theta^{(3)}(i) = q(i).$$

Клод-Луи-Мари-Анри Навье [11] сформулировал фундаментальные зависимости между внутренними усилиями в балке: $Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}$; $q(x) = -\frac{dQ(x)}{dx}$, связав поперечную силу $Q(x)$ с производной изгибающего момента $M(x)$, а распределенную нагрузку $q(x)$ — со второй производной момента. Эти соотношения образуют цепочку уравнений, «поднимаясь» от момента к поперечной силе и далее к распределенной нагрузке.

Следуя аналогии с методом Навье, здесь предлагается продолжить цепочку производных «вниз», введя новую величину — *возвратный потенциал* $P(i)$:

$$M(i) = \frac{P(i)}{di}. \quad (9)$$

Возвратный потенциал $P(i)$ определяется как интеграл от изгибающего момента:

$$P(i) = \int_0^i M(\xi) d\xi,$$

где параметр i может принимать значение либо x (прямолинейная система координат), либо s (криволинейная система координат).

Значения возвратного потенциала $P(i)$ можно найти из основного соотношения:

$$EI \cdot \kappa(i) + M(i) = 0.$$

1. В прямолинейной системе координат, где $\kappa(x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$, момент определяется как:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2}.$$

Соответственно, возвратный потенциал с учетом формулы (9) принимает вид:

$$P(x) = -EI \frac{dy(x)}{dx} = -EI \cdot \theta(x), \quad (1)$$

где $\theta(x)$ — угол поворота нейтральной оси балки с координатой x .

2. В криволинейной системе координат, где $\kappa(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$, момент определяется как:

$$M(s) = -EI \frac{d\theta(s)}{ds}.$$

Возвратный потенциал также пропорционален углу поворота:

$$P(s) = -EI \cdot \theta(s). \quad (10)$$

Таким образом, $P(i)$ имеет единую физическую природу (см. формулы (10), (11) и связан с углом поворота сечения через изгибную жесткость EI с отрицательным знаком, отражающим стремление системы «вернуться» в исходное (недеформированное) состояние. В обобщенной форме:

$$P(i) = -EI \cdot \theta(i). \quad (12)$$

Размерность $P(i)$ совпадает с размерностью изгибной жесткости, умноженной на угол ($\text{Н} \cdot \text{м}^2$), что подтверждает его инвариантность при переходе между различными системами координат.

Возвратный потенциал $P(i)$ можно рассматривать как обобщенную координату, относительно которой формулируется следующая система уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} P'(i) &= M(i); \\ P''(i) &= Q(i); \\ P^{(3)}(i) + q(i) &= 0. \end{aligned}$$

Эта система объединяет все силовые факторы изгибной задачи, начиная с возвратного потенциала $P(i)$ и заканчивая распределенной поперечной нагрузкой $q(i)$.

Изменение искомой функции (с функции прогиба на возвратный потенциал) не меняет постановку задачи: по-прежнему требуется четыре граничных условия. Три из них определяют $P(i)$, а одно — функцию прогиба $y(i)$:

$$y(x) = -\frac{1}{EI} \int_0^x P(\xi) d\xi + C_4,$$

где C_4 определяется из граничного условия $y(0)$.

Геометрию деформированной балки можно восстановить по углу поворота $\theta(s) = -\frac{P(s)}{EI}$:

$$\begin{cases} x(s) = \int_0^s \cos\left(-\frac{P(\xi)}{EI}\right) d\xi; \\ y(s) = \int_0^s \sin\left(-\frac{P(\xi)}{EI}\right) d\xi \end{cases}, \quad (13)$$

Таким образом, введение возвратного потенциала $P(i)$ позволяет свести постановку задачи к минимально необходимому набору данных: если известен $P(i)$, то геометрия деформированной балки может быть точно восстановлена в криволинейной системе координат по формулам (13), без необходимости напрямую использовать функцию прогиба $y(x)$ в прямолинейной системе координат. Это упрощение дает возможность рассматривать задачу как строго линейную в криволинейной системе отсчета на всем диапазоне деформаций.

1. Проверять совместимость моделей: возвратный потенциал $P(i)$ определяется через первую производную классического решения $y(x)$ (см. формулу (10)).

2. Использовать классические решения для точной геометрии: зная классическую функцию прогиба $y(x)$, можно вычислить углы наклона, которые соответствуют углам наклона в криволинейной системе отсчета $\theta(s) = \theta(x) = y'(x)$, а далее — восстановить точную пространственную форму балки в криволинейной системе координат (см. формулы **Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

3. Закон Гука для изгибных деформаций: возвратный потенциал $P(i)$, как силовой фактор, связан с деформационным фактором — углом поворота $\theta(i)$ — через постоянный коэффициент пропорциональности, изгибную жесткость EI (см. формулы (10) – (12)). Это прямой аналог зависимости продольной силы N от относительных продольных деформаций $\Delta L/L$ через осевую жесткость EA в законе Гука для растяжения/сжатия: $N \cdot L = EA \frac{\Delta L}{L}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В предыдущем разделе анонсирована интрига относительно геометрической интерпретации функции $y(x)$ — основной неизвестной теории балки Эйлера – Бернулли. Для этого проведем мысленный эксперимент в духе Альберта Эйнштейна. Представим себе невесомую и бесконечно длинную консольную балку ($s = \infty$) с постоянной изгибной жесткостью ($EI = \text{const}$, Нм²), находящуюся в условиях чистого изгиба (деформация балки происходит без изменения длины нейтральной оси), которая остается бесконечной. Если мы попытаемся вычислить кривизну балки по «точной» формуле (6) в прямолинейной системе координат в середине этой балки, то столкнемся с парадоксом: координата $x = \infty/2$ все еще равна бесконечности, а проекции балки на прямолинейную ось уже нет — в прямоугольной системе координат балка «свернулась» в окружность за счет удлинения верхних волокон и укорочения нижних при сохранении исходной длины.

Таким образом, «точное» определение кривизны в прямолинейной системе координат рушится и утрачивает статус универсального. Если же рассматривать эту задачу в криволинейной системе координат s , естественным образом связанной с деформированной осью балки, то проекции на прямоугольную систему координат для любого произвольного сечения окружности выражаются через привычные тригонометрические функции (см. формулу (13)) и могут быть применены на всем интервале $[0, +\infty)$.

Учитывая этот полуоткрытый интервал допустимых значений криволинейной координаты s , уместно отметить, что еще Леонард Эйлер в названии своей работы [8] использовал предельно широкую формулировку:

«...или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле».

К округлой форме деформирования бесконечной консольной балки в условиях чистого изгиба можно прийти и аналитическим путем, исходя из классической задачи о деформировании консольной балки под действием постоянного изгибающего момента на свободном конце, создающего равномерный момент M_0 по всей длине балки.

В классической постановке уравнение прогиба консольной балки под действием постоянного момента общеизвестно:

$$y(x) = \frac{M_0}{2EI} x^2. \quad (14)$$

Это уравнение естественным образом получается из обобщенного уравнения равновесия относительно постоянного изгибающего момента M_0 :

$$\frac{d^2 y(i)}{di^2} = \frac{M_0}{EI}.$$

Взяв двойную «антипроизводную» (дважды проинтегрировав по координате i):

$$y(i) = \iint \frac{M_0}{EI} di^2 = \frac{M_0}{EI} \iint di^2 = \frac{M_0}{EI} \left(\frac{i^2}{2} + C_1 i + C_2 \right).$$

С учетом граничных условий для консольной балки $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, константы C_1 , C_2 , C_2 равны нулю, и решение принимает вид (21) в прямолинейной системе координат при $i = x$.

Если же воспользоваться определенными интегралами с нулевыми нижними пределами интегрирования:

$$y(i) = \frac{M_0}{EI} \int_0^i \int_0^\xi d\eta d\xi = \frac{M_0 i^2}{2EI},$$

то это автоматически учитывает граничные условия $C_2 = y(0) = 0$, $C_1 = y'(0) = 0$, исключая необходимость их явного вычисления. Таким образом, окончательно: $y(i) = \frac{M_0 i^2}{2EI}$.

Геометрию деформирования консольной балки определим параметрически по формулам (4) через функцию углов поворота $\theta(x)$ полученную из абстрактной функции $y(x)$ через ее производную:

$$\begin{aligned} \theta(x) = y'(x) &= \frac{M_0}{EI} x \Rightarrow (s) = \kappa \cdot s, \\ x(s) &= \int_0^s \cos(\theta(\xi)) d\xi = \int_0^s \cos\left(\frac{M_0}{EI} \xi\right) d\xi = \frac{EI}{M_0} \sin\left(\frac{M_0}{EI} s\right) = R \cdot \sin\left(\frac{s}{R}\right); \\ y(s) &= \int_0^s \sin(\theta(\xi)) d\xi = \int_0^s \sin\left(\frac{M_0}{EI} \xi\right) d\xi = \frac{EI}{M_0} \left[\cos\left(1 - \frac{M_0}{EI} s\right) \right] = R \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right]. \end{aligned}$$

Эти функции описывают окружность радиусом $R = EI/M_0$, что подтверждает результаты мысленного эксперимента. При $M_0 > 0$ балка закручивается против часовой стрелки.

Таким образом, имея абстрактную функцию $y(x)$, полученную как решение классического уравнения равновесия теории Эйлера – Бернулли, мы можем определить точную форму деформирования консольной балки в условиях чистого изгиба. Чтобы наглядно продемонстрировать геометрическую природу основной неизвестной теории балки, рассмотрим задачу чистого изгиба консольной балки с единичной изгибной жесткостью и моментом ($EI = 1$, $M_0 = 1$). В этом случае деформированная балка свернется в окружность с единичным радиусом $R = 1$, а абстрактная функция примет вид (см. кривую 2 на рис. 1):

$$y(x) = \frac{x^2}{2}. \quad (15)$$

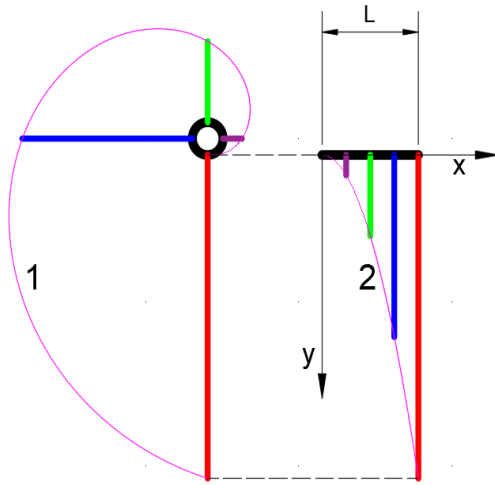


Рис. 1. Абстрактная функция $y(i)$ в полярной (1) и прямолинейной (2) системах координат

Fig. 1. Abstract function $y(i)$ in polar (1) and rectilinear (2) coordinate systems

Так как длина единичной окружности деформированной балки известна, для удобства ограничимся рассмотрением участка длиной $L = 2\pi$, поскольку дальнейшее поведение будет носить циклический характер и легко прогнозироваться.

Восстановим геометрию «кривой-носителя» (см. кривую 1 на рис. 1) для рассматриваемой длины 2π . При этом, зная истинное положение нейтральной оси деформированной балки (единичная окружность), добавим ее при построении параболы (15) в полярной системе

координат, по формуле: $r(\varphi) = 1 + \frac{\varphi^2}{2}$ или в общем случае:

$$r(\varphi) = R + \frac{\varphi^2}{2} = \frac{EI}{M_0} + \frac{M_0}{2EI} \varphi^2.$$

Здесь завершился многовековой путь осмысления геометрической природы деформирования балки. Мы впервые видим, что функция $y(x)$ — это не «функция прогиба» в привычной трактовке, а развертка топологической системы координат на прямолинейную ось.

В этой развертке:

- **Абсцисса x** соответствует исходной длине балки L . Поскольку в модели Эйлера – Бернулли рассматривается чистый изгиб без возникновения продольных усилий, на прямолинейную ось x разворачивается криволинейная деформированная ось s , сохраняющая исходную длину L ;
- **Ордината $y(x)$** отражает расстояние r от топологической абсциссы до нейтральной оси деформированной балки, измеренное вдоль нормали для $s(\varphi)$. Это расстояние включает как вклад угловой координаты φ , так и текущего радиуса кривизны $R(\varphi) = 1/\kappa(\varphi)$.

Далее на рис. 2 показаны топологические абсциссы для задачи, рассмотренной на рис. 1,

но построенные для различных значений изгибной жесткости по формуле: $r(\varphi) = R + \frac{\varphi^2}{2R}$, где

$R = EI/M_0$ для единичного момента.

Можно заметить, что с увеличением изгибной жесткости возрастает размер топологической абсциссы, представляющей собой логарифмическую спираль, смещенную на величину радиуса кривизны балки, и в ее начале формируется почти прямолинейный участок. Следует еще раз отдать должное гениальности Жирара: «линеаризовав» кривизну в начальной части топологической абсциссы в прямолинейной системе координат, он фактически предвосхитил введение топологической системы координат и интуитивно использовал ее прямолинейный сегмент для упрощенных инженерных расчетов.

С появлением возможности восстанавливать точную геометрию деформированных балок на основе классических решений у инженеров появилась новая степень свободы: теперь можно

оперативно оценивать целесообразность использования прямолинейной системы координат при расчетном моделировании.

Для примера рассмотрим три классические задачи поперечного изгиба балок с постоянной поперечной нагрузкой $q(x) = q$ и различными условиями закрепления. Абстрактные функции $y(x)$, полученные в классической теории, имеют вид:

- для шарнирно-опертой балки:

$$y(x) = \frac{qx(x-L)(x^2 - Lx - L^2)}{24EI};$$

- для защемленной на двух опорах балки:

$$y(x) = \frac{qx^2(x-L)^2}{24EI};$$

- для защемленной на одной левой опоре: $y(x) = \frac{qx^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)}{24EI},$

где q — интенсивность равномерно-распределенной нагрузки; EI — изгибная жесткость поперечного сечения балки; L — длина пролета балки.

Точные аналитические решения в так называемой «геометрически нелинейной постановке» для этих трех случаев, записанные в параметрическом виде, представлены ниже:

- для шарнирно-опертой балки:

$$\begin{cases} \theta(\xi) = \frac{q(L^3 - 6\xi^2L + 4\xi^3)}{24EI}; \\ x(s) = \int_0^s \cos(\theta(\xi)) d\xi; \\ y(s) = \int_0^s \sin(\theta(\xi)) d\xi. \end{cases} \quad (16)$$

- для защемленной на двух опорах балки:

$$\begin{cases} \theta(\xi) = \frac{q\xi(L - 2\xi)(L - \xi)}{12EI}; \\ x(s) = \int_0^s \cos(\theta(\xi)) d\xi; \\ y(s) = \int_0^s \sin(\theta(\xi)) d\xi. \end{cases} \quad (17)$$

- для защемленной на одной левой опоре:

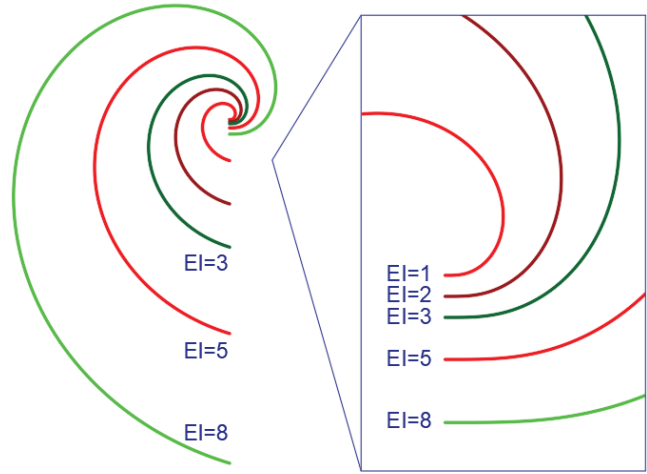


Рис. 2. Топологические абсциссы консольных балок при чистом изгибе с разной изгибной жесткостью
Fig. 2. Topological abscissas of cantilever beams under pure bending for different bending stiffnesses

$$\begin{cases} \theta(\xi) = \frac{q\xi(3L^2 - 3\xi L + \xi^2)}{6EI}; \\ x(s) = \int_0^s \cos(\theta(\xi)) d\xi; \\ y(s) = \int_0^s \sin(\theta(\xi)) d\xi. \end{cases} \quad (18)$$

Как следует из уравнений (16)-(18), для определения точного решения достаточно вычислить функцию поворота сечений балки $\theta(\xi)$, которая находится как производная абстрактной функции $y(\xi)$ по технической переменной интегрирования ξ : $\theta(\xi) = y'(\xi)$.

После этого точная геометрия деформированной балки может быть восстановлена с использованием параметрических уравнений (4). Такой подход позволяет напрямую связать классическое решение с реальным пространственным положением нейтральной оси балки.

Как показано выше, классические решения теории Эйлера – Бернулли позволяют восстановить точную геометрию деформированной балки. Однако этот процесс вскрывает фундаментальные ограничения самой модели. В частности, такие решения предполагают, что внешние нагрузки остаются нормальными к деформированной оси балки на всем протяжении деформации.

При этом внутренние усилия и опорные реакции вычисляются так, как если бы балка существовала в некоем «четвертом спиральном измерении» — здесь невольно вспоминается Альберт Эйнштейн. В этом пространстве нейтральная ось балки s остается прямой, а сумма всех внешних и внутренних сил и моментов, включая реакции на опорах, удовлетворяет условиям равновесия: $\Sigma y(s) = 0$, $\Sigma M(s) = 0$.

В подтверждение на рис. 3 представлена восстановленная геометрия консольной балки с единичной изгибной жесткостью ($EI = 1$) и единичной сосредоточенной нагрузкой ($F = 1$), при разных длинах балки соответствующие первым шести числам последовательности Фибоначчи (1, 2, 3, 5, 8, 13).

Для восстановления геометрии деформирования консольной балки со сосредоточенной нагрузкой F на свободном конце использовалась абстрактная функция деформаций

$$y(i) = \frac{F(3Lx^2 - x^3)}{6EI} y, \text{ а также ее производная } \theta(i) = \frac{iF(2L - i)}{2EI},$$

которая описывает закон изменения угла поворота сечения. Последнее выражение было подставлено в уравнениях (4) для вычисления точной пространственной формы балки.

Все изложенное выше позволяет по-новому осмыслить результаты расчетов стержневых систем, выполненных как в классической, так и в «геометрически нелинейной» постановке. Это открывает путь к более осознанному выбору координатной системы — прямой или криволинейной — и критической оценке результатов аналитического моделирования.

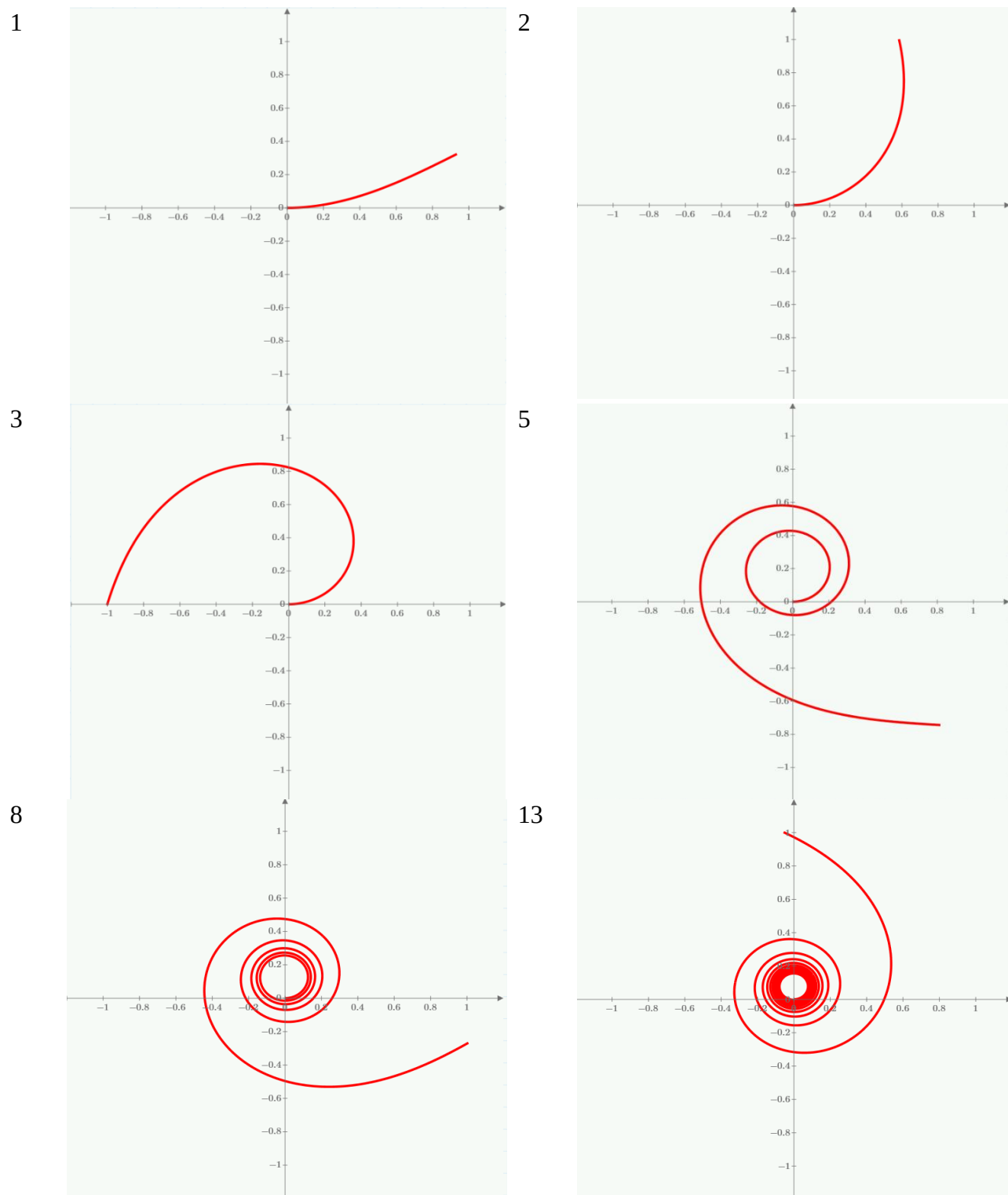


Рис. 3. Точная форма деформирования консольной балки со сосредоточенной нагрузкой F на свободном конце при $EI = 1$ и длинах L , выбранных по последовательности Фибоначчи (1, 2, 3, 5, 8, 13)

Fig. 3. Exact deformation shapes of a cantilever beam with a concentrated load F at the free end for $EI = 1$ and beam lengths L taken from the Fibonacci sequence (1, 2, 3, 5, 8, 13)

Для примера на рис. 4, *a* показана консольная балка единичной длины, у которой классическое решение (пунктирная кривая) дает меньшую деформацию, чем точное. На рис. 4, *b* —

шарнирно-опертая балка той же длины, где деформации, вычисленные в обеих системах координат, практически совпадают, что позволяет рассматривать классическое решение как достаточно точное. На рис. 4, с представлена балка утроенной длины: здесь классическое решение дает завышенные деформации по сравнению с точным.

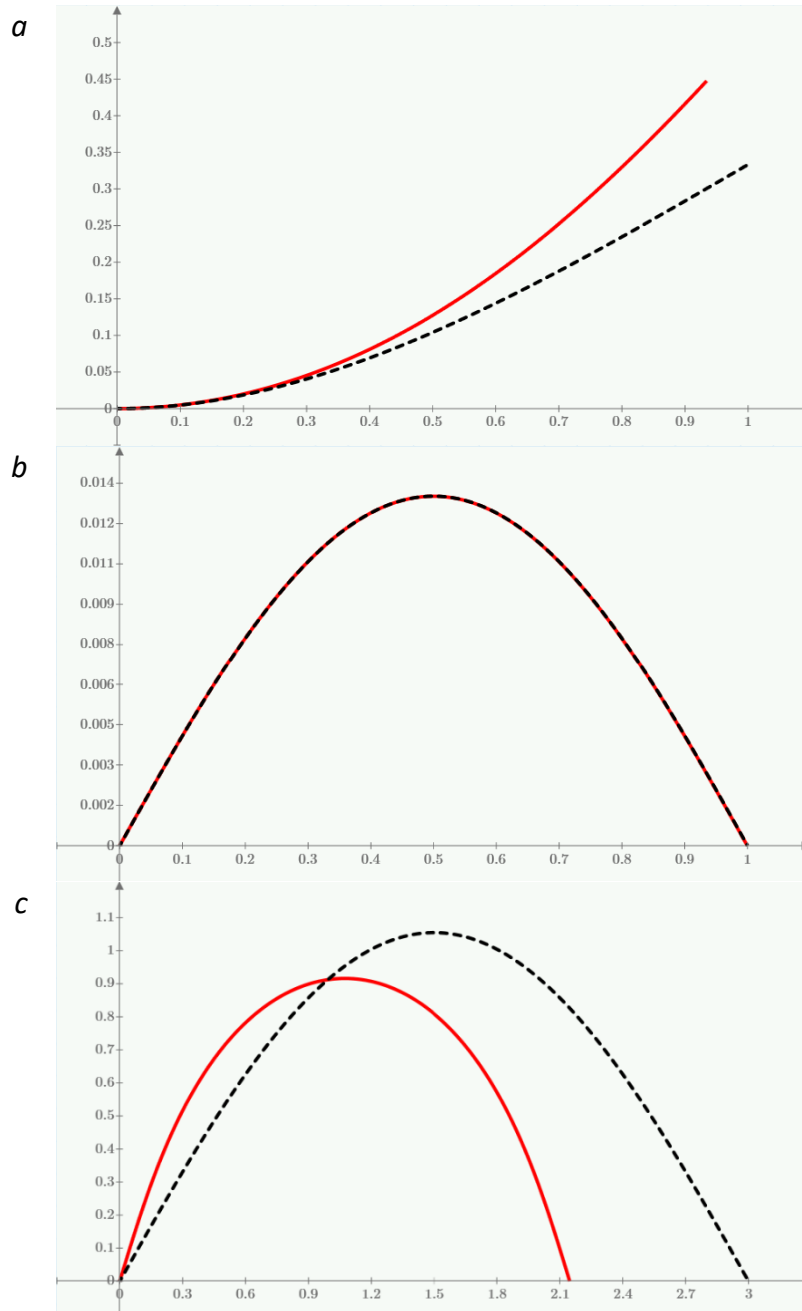


Рис. 4. Сравнение деформаций балок по классическому решению (пунктир) и точному решению (сплошная линия): *a* — консольная балка со сосредоточенной нагрузкой на конце; *b* — шарнирно-опертая балка с равномерно распределенной нагрузкой; *c* — шарнирно-опертая балка утроенной длины с равномерно распределенной нагрузкой

Fig. 4. Comparison of beam deformations based on the classical solution (dashed line) and the exact solution (solid line): *a* — cantilever beam with a concentrated end load; *b* — simply supported beam under uniform distributed load; *c* — simply supported beam of triple length under uniform distributed load

Если принять во внимание, что в модели Эйлера – Бернулли нагрузка всегда приложена нормально к деформированной оси балки, различия между решениями становятся логически объяснимыми. Точные прогибы учитывают этот эффект, что, в частности, объясняет, почему в шарнирно-опертой балке деформация оказывается меньше, чем по классическому решению (рис. 4, с). При вертикальной нагрузке обычно ожидается, что смещение подвижной опоры приведет к большему прогибу, однако точное решение демонстрирует противоположный результат: нейтральная ось балки «раздувается» в стороны и в пролете оказывается меньше классического решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выполнено обобщение классической теории балки Эйлера – Бернулли, истоки которой восходят к работам Якоба Бернулли более 330 лет назад. Еще в 1694 г. в *Acta Eruditorum* Бернулли предложил концепцию геометрического описания внутренних усилий в упругих телах, ставшую отправной точкой для создания моделей, позднее реализованных в гипотезе плоских сечений Даниилом Бернулли. Со временем развитие теорий шло по пути усложнения уравнений равновесия при одновременном упрощении выражения для кривизны. Модификация, предложенная в теории Тимошенко [14, 15], частично ослабила гипотезу плоских сечений, однако результаты настоящей работы показывают: гипотеза Бернулли сохраняет физическую обоснованность и применимость даже при больших деформациях.

Впервые показано, что функция $\chi(y)$, традиционно интерпретируемая как «функция прогиба», на самом деле является разверткой топологического пространства в прямоугольную (декартову) систему координат. Это дало возможность по-новому интерпретировать классические решения теории балок Эйлера – Бернулли и выявить фундаментальные ограничения как классической, так и «геометрически нелинейной» постановок. Установлено, что точные решения, восстанавливаемые из классических формул, предполагают сохранение нормального приложения нагрузки к деформированной оси, что приводит к физическим противоречиям в ряде задач.

Впервые со времен Навье в модель Эйлера – Бернулли введен новый силовой фактор — возвратный потенциал $P(\chi)$, который расширяет дифференциальные соотношения и замыкает их на основную физически наглядную переменную — угол поворота сечения. Это обобщение показало, что так называемые «геометрически нелинейные» задачи — лишь математический артефакт, возникающий при развертке криволинейной системы координат на прямую.

Таким образом, спустя более 330 лет теория балки возвращается к своим истокам, но на новом уровне. Подобно логарифмической спирали Якоба Бернулли, сохраняющей форму при изменении масштаба и ставшей символом вечного возвращения, идеи классической механики воскресают в обновленном виде. Латинская надпись на надгробии Якоба Бернулли “*Eadem mutata resurgo*” («Измененная, я воскресаю вновь») как нельзя лучше отражает суть выполненной работы: фундаментальные принципы теории балки пережили трансформацию и обрели новую жизнь, открывая перспективы для дальнейшего развития аналитических моделей изгиба.

Настоящая работа дает повод для переосмысления общей теории геометрической нелинейности балок, а также других аналитических моделей, основанных на теории Эйлера – Бернулли, включая теории пластин и оболочек. В этих теориях в качестве основных неизвестных также используются абстрактные функции одного или двух аргументов — $y(\chi)$ и $w(\chi, y)$, определенные в соответствующих топологических пространствах.

БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящая работа с глубоким уважением посвящается моему учителю — академику Российской академии наук, заслуженному деятелю науки РФ, доктору технических наук, профессору Макагонову Виктору Александровичу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернулли Я. Кривизна упругой пластины. Ее идентичность с кривизной полотна, натянутого под действием веса. Радиусы кругов касания, выраженные в простейших терминах, вместе с некоторыми новыми теоремами, относящимися к этому вопросу // *Acta Eruditorum*. 1694. С. 262–276.
2. Бернулли Я. Решение задачи Лейбница о кривой с равными приближениями и отступлениями от заданной точки посредством выпрямления упругой кривой // *Acta Eruditorum*. 1694. С. 276–280.
3. Бернулли Я. Истинная гипотеза сопротивления твердых тел с доказательством кривизны тел, обладающих упругостью // История Королевской академии наук Парижа. 1705 (посмертное изд.). С. 139–150.
4. Бернулли Я. Построение кривой с равными приближениями и отступлениями, с использованием выпрямления некоторой алгебраической кривой: дополнение к недавно опубликованному решению за июнь // Собрание сочинений Якоба Бернулли. Т. 1. Лозанна; Женева : Марк-Мишель Буске, 1744 (посмертное изд.). С. 608–612.
5. Бернулли Д. Размышления и пояснения о новых колебаниях струн, изложенные в мемуарах Академии за 1747 и 1748 годы // История Королевской академии наук и изящной словесности Берлина с мемуарами за тот же год, взятыми из регистров этой академии. Берлин : Королевская академия наук и изящной словесности, 1753 (опубл. в 1755). Т. 9. С. 147–172.
6. Бернулли Д. О смешении нескольких видов простых изохронных колебаний, которые могут сосуществовать в одной и той же системе тел // История Королевской академии наук и изящной словесности Берлина с мемуарами за тот же год, взятыми из регистров этой академии. Берлин : Королевская академия наук и изящной словесности, 1753 (опубл. в 1755). Т. 9. С. 173–195.
7. Бернулли Д. Письмо № 15 к Л. Эйлеру от 24 мая 1738 г. // Переписка по математике и физике некоторых знаменитых геометров XVIII века / под ред. П.Н. Фусса. СПб. : Императорская Академия наук, 1843. Т. 2. С. 446–448.
8. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. Лозанна; Женева : Марк-Мишель Буске, 1744.
9. Жирар П.С. Аналитическое исследование сопротивления твердых тел и тел равной прочности, с приложением ряда новых опытов о прочности и упругости древесины дуба и пихты. Париж : Фирмен Дидо; Дюпон, 1798. 48 с.
10. Тодхантер И. История теории упругости и сопротивления материалов: от Галилея до настоящего времени. Т. 1: От Галилея до Сен-Венана (1639–1850) / под ред. К. Пирсона. Лондон : Cambridge University Press, 1886. 950 с.
11. Навье К.-Л.-М.-А. Краткое изложение лекций, прочитанных в Школе мостов и дорог по применению механики к сооружению конструкций и машин. Париж : Фирмен Дидо, 1826. 500 с.
12. Клапейрон Б.П.Э. Внутреннее сопротивление твердых тел // Журнал Политехнической школы. 1857. Т. 24. С. 1–233.
13. Френе Ж.Ф. О кривых двойной кривизны // Журнал чистой и прикладной математики. 1847. Т. 17. С. 437–447.
14. Тимошенко С.П. О поправке на сдвиг в дифференциальном уравнении поперечных колебаний призматических стержней // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1921. Т. 41 № 245. С. 744–746. DOI: 10.1080/14786442108636264
15. Тимошенко С.П. О поперечных колебаниях стержней постоянного поперечного сечения // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1922. Т. 43. № 253. С. 125–131. DOI: 10.1080/14786442208633855

REFERENCES

1. Bernoulli J. Curvatura Laminae Elastica. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi studii expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus. *Acta Eruditorum*. 1694; 262-276.
2. Bernoulli J. Solutio problematis Leibnitiani de curva accessibus et recessibus aequalibus a puncto dato, mediante rectificatione curva elastica. *Acta Eruditorum*. 1694; 276-280.
3. Bernoulli J. Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris*. 1705; 139-150.
4. Bernoulli J. Constructio Curvae Accessus et Recessus aequalis, Ope Rectificationis Curvae cujusdam algebraicae: Addenda nuperæ solutioni Mensis Junii. *Opera Omnia, Tomus I*. Lausanne; Geneva, Marcum-Michaellem Bousquet, 1744; 608-612.

5. Bernoulli D. Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 & 1748. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin avec les Mémoires pour la même année, tirez des registres de cette Académie*. 1755; 9:147-172.
6. Bernoulli D. Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin avec les Mémoires pour la même année, tirez des registres de cette Académie*. 1755; 9:173-195.
7. Bernoulli D. Letter No. 15 to L. Euler, dated May 24, 1738. In: Fuss P.H. (ed.). *Correspondence on Mathematics and Physics of Some Famous Geometers of the 18th Century*. Vol. 2. Saint Petersburg, Imperial Academy of Sciences, 1843; 446-448.
8. Euler L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausanne; Geneva, Marcum-Michaellem Bousquet, 1744.
9. Girard P.S. *Traité analytique de la résistance des solides, et des solides d'égale résistance. Auquel on a joint une suite de nouvelles expériences sur la force, et l'élasticité spécifiques des bois de chêne et de sapin*. Paris, Firmin Didot & Du Pont, 1798; 48.
10. Todhunter I. *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials: From Galilei to the Present Time*. Vol. 1: *Galilei to Saint-Venant, 1639–1850*. Edited and completed by Karl Pearson. London, Cambridge University Press, 1886; 950.
11. Navier C.-L.-M.-H. *Résumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. Paris, Firmin Didot père et fils, 1826; 500.
12. Clapeyron B.P.E. Mémoire sur la résistance intérieure des corps solides (On the internal resistance of solid bodies). *Journal de l'École Polytechnique*. 1857;24:1-233.
13. Frenet J. F. Sur les courbes à double courbure. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1847; 17:437-447.
14. Timoshenko S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1921; 41(245):744-746. DOI: 10.1080/14786442108636264
15. Timoshenko S.P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1922; 43(253):125-131. DOI: 10.1080/14786442208633855