2025. 3(11). 41–57

ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ

REINFORCED CONCRETE STRUCTURES (ZHELEZOBETONNYYE KONSTRUKTSII)

ISSN 2949-1622 (PRINT)
ISSN 2949-1614 (ONLINE)
HTTPS://G-B-K.RU

УДК 539.313 + 624.074 + 517.958 + 514.77 + 531.43
DOI: 10.22227/2949-1622.2025.3.41-57

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ/RESEARCH ARTICLE

Топологическая теория балки (ТТБ)

В.А. Нещадимов[1*]

[1] *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, Российская Федерация*
*expertor@internet.ru

Ключевые слова: топологическая система координат, топологическая теория балки (ТТБ), топологическое моделирование деформаций, возвратный потенциал (топологическая формулировка), обобщенная теория балки; геометрически индуцированная продольная сила, точная кривизна в топологической системе координат, энергетически согласованная модель изгиба, вариационный принцип Эйлера в топологической постановке, восстановление геометрии по топологическим интегралам Френе, топологическое обобщение модели Эйлера – Бернулли

История статьи
Поступила в редакцию: 25.08.2025
Доработана: 08.09.2025
Принята к публикации: 10.09.2025

Для цитирования
Нещадимов В.А. Топологическая теория балки (ТТБ) // Железобетонные конструкции. 2025. Т. 11. № 3. С. 41-57.

Аннотация. Идея связи деформации и усилия восходит к Галилею (1638), который впервые рассмотрел удлинение стержня под нагрузкой, и к Гуку (1678), сформулировавшему основной закон упругости. На этом фундаменте Якоб Бернулли (1694), один из создателей науки о сопротивлении материалов, впервые поставил задачу об упругой линии — стремясь распространить законы продольного растяжения на изгиб. Однако отсутствие замкнутой геометрической связи между кривизной и внутренними силами не позволило ему завершить построение теории. Эйлер (1744), развивая идеи Бернулли, предложил вариационный принцип минимизации кривизны, но ввел два ключевых допущения — неизменность горизонтальной проекции и малость углов — что привело к классической линейной теории Эйлера – Бернулли. Эти приближения исключили продольные деформации из энергетического баланса и породили скрытую индуцированную продольную силу, не представленную в функционале энергии. В настоящей работе предложена Топологическая теория балки (ТТБ) — первая геометрически строгая модель изгиба, опирающаяся на естественную дуговую координату и точное определение кривизны Гюйгенса. Модель включает продольные деформации в вариационный принцип, вводит топологический модификатор кривизны $1/(1 + N/EA)$ и приводит к замкнутой системе уравнений для угла поворота, продольной силы и изгибающего момента. Таким образом, работа завершает линию, начатую Галилеем, Гуком, Бернулли и Эйлером: через 330 лет после постановки задачи Якобом Бернулли впервые получено полное строгое решение об упругой линии, учитывающее и изгиб, и продольные деформации в единой энергетически согласованной топологической модели.

Виктор Александрович Нещадимов, канд. техн. наук, ст. преподаватель каф. Железобетонные и каменные конструкции, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 4558-1454, ResearcherID: HTS-6654-2023, ORCID: 0009-0006-3368-0905, E-mail: expertor@internet.ru

Topological Beam Theory (TBT)

V.A. Neshchadimov[1*]

[1] *Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), Moscow, Russian Federation*
*expertor@internet.ru

Keywords: topological coordinate system, Topological Beam Theory (TBT), topological deformation modelling; return potential (topological formulation), generalized beam theory, geometrically induced axial force, exact curvature in topological coordinates, energetically consistent bending model, Euler variational principle in topological form, topological Frenet integrals for geometry reconstruction; topological generalization of the Euler – Bernoulli beam

Article history
Received: 25.08.2025
Revised: 08.09.2025
Accepted: 10.09.2025

For citation
Neshchadimov V.A. Topological Beam Theory (TBT). *Reinforced Concrete Structures*. 2025; 3(11):41-57.

Abstract. The idea of relating deformation to internal force dates back to Galileo (1638), who first examined the elongation of a bar under load, and to Hooke (1678), who formulated the fundamental law of linear elasticity. Building on this foundation, Jacob Bernoulli (1694) — one of the founders of strength-of-materials theory — was the first to pose the problem of the *elastic curve*, attempting to extend the laws of axial deformation to bending. However, the absence of a closed geometric relation between curvature and internal forces prevented him from completing a general theory. Euler (1744), developing Bernoulli's ideas, introduced a variational principle based on the minimization of curvature, but employed two critical assumptions — constant horizontal projection and small rotations — which led to the classical linear Euler – Bernoulli beam theory. These approximations removed axial deformation from the energy balance and introduced a hidden geometrically induced axial force not represented in the strain-energy functional. In this work, we propose the Topological Beam Theory (TBT) — the first geometrically exact model of bending formulated in the natural arc-length coordinate and employing the exact curvature definition of Huygens. The model incorporates axial deformation directly into the variational principle, introduces a topological curvature modifier $1/(1 + N/EA)$, and yields a closed system of equations for the rotation angle, axial force, and bending moment. Thus, the present study completes the conceptual line initiated by Galileo, Hooke, Bernoulli, and Euler: for the first time in over 330 years since Jacob Bernoulli posed the problem, we obtain a fully exact solution for the elastic curve that consistently accounts for both bending and axial deformation within a unified, energetically coherent topological model.

ВВЕДЕНИЕ

Теория изгиба балок восходит к научным работам Якоба Бернулли конца XVII в. и концептуально сформировалась благодаря совместным усилиям Даниила Бернулли и Леонарда Эйлера в середине XVIII в.

Вдохновленный экспериментальными исследованиями прочности и разрушения балок, восходящими к трудам Галилео Галилея [1], где впервые появляется понятие *внутренней продольной силы* $N(x)$, и опираясь на закон Гука [2], устанавливающий связь между деформацией и внутренним усилием (Ut tensio, sic vis — «Каково растяжение, такова и сила»), он перенес эти идеи на изгибающие деформации.

Решающим вкладом Якоба Бернулли стало введение второго силового фактора — внутреннего изгибающего момента $M(x)$ как реакции на внешний момент, действующий относительно точки, понятие которого ранее было сформулировано Кристианом Гюйгенсом [3] как *momentum virium respectu puncti*.

Victor A. Neshchadimov, candidate of technical sciences, senior lecturer of the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4558-1454, ResearcherID: HTS-6654-2023, ORCID:0009-0006-3368-0905, E-mail: expertor@internet.ru

В серии работ [4–7] и особенно в трактате *Curvatura Laminae Elastica* (1694) [4] он впервые сформулировал геометрическую связь между кривизной упругой линии и изгибающим моментом.

Якоб Бернулли показал, что кривизна линии изгиба в каждой точке пропорциональна внутреннему изгибающему моменту в этой же точке $(\kappa \propto M)$. Тем самым он впервые продемонстрировал, что изгиб может описываться геометрически — через форму кривой, а не через напряжения, что по меркам XVII в. стало революционным шагом.

Установленная им пропорциональная связь между кривизной упругой линии и внутренним моментом заложила фундамент дальнейшего развития теории изгибаемых стержней, определила направление исследований Эйлера и фактически положила начало классической теории балки как разделу сопротивления материалов.

На основе идеи Якоба Бернулли о геометрическом моделировании внутренних усилий в упругих телах Даниил Бернулли развил концепцию, предложив гипотезу плоских сечений. Однако его вклад в развитие теории балки этим не ограничивается.

Исследования, посвященные колебаниям струн, опубликованные в статьях [8, 9], стали важным этапом в становлении теории упругости и впоследствии теории балок.

В работе [9] Бернулли рассмотрел колебания натянутой струны и сформулировал принцип суперпозиции, согласно которому сложное движение может быть представлено как сумма простых изохронных колебаний. Этот принцип заложил основы современного модального анализа. Кроме того, он указал на существование неподвижных точек на струне — узлов, сохраняющих свое положение при колебаниях.

Именно это наблюдение навело Бернулли (и позднее автора настоящей работы) на мысль, что при колебаниях струны возникает геометрически индуцированная продольная сила. Ведь любая кривая, соединяющая две точки, длиннее прямой, соединяющей те же точки. Возник естественный интерес определить распределение этой продольной силы вдоль длины струны, поскольку именно она способна останавливать колебания при отсутствии внешнего трения. Однако это уже отдельная линия рассуждений, которая, как будет показано далее, удивительным образом совпадает с современной трактовкой классической теории балки Эйлера – Бернулли, где балка рассматривается как система с предопределенными продольными связями. Эти связи будут подробно рассмотрены в последующих разделах.

Даниил Бернулли обсуждал свои идеи о колебаниях с Жаном д’Аламбером и Леонардом Эйлером, и именно в ходе этих дискуссий была заложена основа будущей классической теории балки. Хотя его исследования касались струн, ключевые идеи — суперпозиция, наличие узлов и геометрический анализ колебаний — были перенесены на задачи изгиба.

Даниил Бернулли был не только выдающимся математиком и физиком, но и наставником Эйлера. Они работали вместе в Академии наук и художеств в Санкт-Петербурге, обсуждая фундаментальные вопросы механики. В ходе этих обсуждений Эйлер заинтересовался проблемой упругих тел и впоследствии разработал теорию балок, основанную на гипотезе плоских сечений.

Даниил Бернулли предложил Эйлеру использовать вариационное исчисление для вывода уравнений упругих кривых. В письме [10] он сформулировал задачу минимизации интеграла:

$$\int \frac{ds}{R^2}, \qquad (1)$$

где ds — элемент длины дуги; R — радиус кривизны.

Обращаясь к Эйлеру, Бернулли писал:

«Вы говорили мне некоторое время назад о похожей задаче — определить среди всех кривых, имеющих одинаковые концы, ту, для которой $\int \frac{ds}{R^2}$ *минимален...»*

Эта формулировка содержит прямой намек на применение изопериметрического метода, в совершенстве освоенного Эйлером. Хотя Бернулли прямо не указывает, что именно Эйлеру предстоит решить задачу, тон письма ясно выражает уверенность в его способности сделать это с помощью вариационных методов.

Предложенная Бернулли задача минимизации интеграла (1), как известно сегодня, эквивалентна определению потенциальной энергии деформированного упругого стержня с учетом его кривизны. Хотя сам Бернулли не трактовал ее в терминах энергии, именно такая постановка впоследствии легла в основу вариационного вывода уравнений изгиба. Тем самым его письмо не только указало направление, но и фактически инициировало работу Леонарда Эйлера над вариационным методом описания упругих кривых — трудом, ставшим краеугольным камнем классической теории балки [11].

В первом приложении к данному труду (Additamentum I. De Curvis Elasticis) Эйлер рассматривает задачу о форме упругой пластины *AB*, изогнутой в виде кривой *AD* с радиусом кривизны *R*. Он ссылается на идею Даниила Бернулли, согласно которой изгиб можно характеризовать через выражение, аналогичное потенциальной силе, пропорциональной интегралу (1). Хотя этот функционал еще не трактуется как энергия в строгом физическом смысле, Эйлер использует его как геометрическую меру, минимизация которой соответствует равновесному состоянию упругой линии.

Для аналитического описания кривой Эйлер вводит координаты x, y и их производные:

$$p=\frac{dy}{dx};\ \ q=\frac{dp}{dx}.$$

Опираясь на формулу Гюйгенса (1673) [3] для радиуса кривизны кривой в декартовой системе координат, Эйлер записывает:

$$R=\frac{\left(1+p^2\right)^{3/2}}{q}. \qquad (2)$$

Это первое появление точной связи между кривизной и производными функции $y(x)$.

Подставляя формулу (2) в исходный геометрический функционал упругой линии $\int\frac{ds}{R^2}$, он переписывает его в эквивалентной форме:

$$\int\frac{ds}{R^2}=\int\frac{q^2}{\left(1+p^2\right)^{5/2}}dx \qquad (3)$$

и далее применяет метод вариационного исчисления для функционала:

$$\int \mathcal{Z}\,dx;\ \mathcal{Z}=\frac{q^2}{\left(1+p^2\right)^{5/2}}.$$

Отсюда Эйлер получает дифференциальное уравнение упругой линии (curva elastica):

$$\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{dP}{dx}=0;\ P=\frac{-5pq^2}{\left(1+p^2\right)^{7/2}};\ Q=\frac{-2q}{\left(1+p^2\right)^{5/2}},$$

которое он затем интегрирует, вводя постоянные a, c, ε, γ. В результате получаются параметрические выражения:

$$dx=\frac{dp}{\left(1+p^2\right)^{5/4}\sqrt{a\sqrt{1+p^2}+\varepsilon p+\gamma}};\qquad dy=\frac{pdp}{\left(1+p^2\right)^{5/4}\sqrt{a\sqrt{1+p^2}+\varepsilon p+\gamma}}. \qquad (4)$$

Эти формулы допускают построение кривой через квадратуры, т.е. последовательные интегралы от известных функций. Эйлер отмечает, что для большинства случаев явные элементарные решения невозможны, но частные решения (включая знаменитую эластическую кривую) допускают аналитическое представление.

После получения общего вариационного решения Эйлер делает следующий шаг, направленный для получения практически приемлемого решения, что стало основой классической теории балки. Он вводит допущение о том, что горизонтальная проекция деформированной оси остается неизменной [11]:

$$dx = \text{const}.$$

Это допущение эквивалентно отсутствию продольной деформации и означает, что нейтральная ось балки в модели Эйлера искусственно фиксирована в продольном направлении. Вследствие этого истинная дуговая координата s подменяется прямолинейной декартовой координатой x и кривизна выражается через угол наклона. При этом:

$$p = \frac{dy}{dx} = \tan\theta;\ q = \frac{dp}{dx} = \left(1+p^2\right)\frac{d\theta}{dx}.$$

Подстановка в формулу Гюйгенса для кривизны (2), $\kappa = \dfrac{1}{R} = \dfrac{q}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}$, дает $\kappa = \dfrac{q}{\sqrt{1+p^2}}$.

При малых углах (классическое приближение XVIII в., $p = \tan\theta \approx \theta$) выполняется $\sqrt{1+p^2} \approx 1$, и Эйлер приходит к выражению:

$$\kappa \approx q = \frac{d\theta}{dx} \tag{5}$$

и, следовательно, к приближенной геометрической форме

$$\int\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx = \int \kappa^2 dx, \tag{6}$$

которая впоследствии стала фундаментом классической теории балки Эйлера – Бернулли с линеаризованной кривизной.

Таким образом, классическое выражение для геометрии изгиба возникает как результат двух ключевых допущений:

1. Фиксированная проекция ds = const — продольные деформации исключаются из модели, и рассматривается их проекция на ось x с искусственным выпрямление естественной координаты в прямолинейную (используется «развертка»).
2. Малые углы $\theta \ll 1$ — точная кривизна Гюйгенса аппроксимируется линейной формой.

Оба допущения скрывают важный физический эффект: при изгибе нейтральная ось удлиняется, что порождает геометрически индуцированную продольную силу, которая в классической модели не включена геометрически и, как будет показано далее, в энергию деформации.

Современное обобщение (см. работу [12]) снимает оба ограничения Эйлера — возвращает истинную дуговую координату и использует точное определение кривизны Гюйгенса [3]:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}, \tag{7}$$

где s — истинная естественная (топологическая) криволинейная координата.

Тогда вариационный принцип (6) принимает строгую геометрическую форму:

$$\int \kappa^2 ds, \tag{8}$$

т.е. полностью совпадает с исходным геометрическим принципом Эйлера, но без допущений XVIII в., что стало фундаментом геометрического обоснование ТТБ.

МЕТОД

В геометрически строгой постановке кривизна упругой линии (см. формулу (7)) определяется как производная угла поворота сечения по дуговой длине. В терминах ТТБ кривизна балки в топологической (естественной, криволинейной) системе координат Лагранжа записывается как:

$$\kappa(S)=\frac{d\theta(S)}{dS}, \tag{9}$$

где $S\in[0,L_0]$ — продольно-недеформированная (естественная, лагранжева, топологическая) координата вдоль нейтральной оси балки.

В общем случае совместного действия изгиба и продольной силы нейтральный слой балки приобретает не только кривизну, но и продольные деформации (растяжение или сжатие). Локальное изменение длины удобно описывать через коэффициент удлинения $\lambda(S)$, который вводится в соответствии с законом Гука для продольных деформаций [2], согласно которому относительное удлинение определяется как $\varepsilon(S)=\frac{N(S)}{EA}$. Поэтому полная длина элементарного участка нейтральной оси после продольного растяжения возрастает как $ds=(1+\varepsilon(S))dS$, что и приводит с учетом метрического соотношения Френе [14]

$$ds=\lambda(S)dS \tag{10}$$

к выражению для коэффициента удлинения, который в ТТБ, как будет показано далее, выполняет функцию метрической плотности или топологического модификатора кривизны:

$$\lambda(S)=\frac{ds}{dS}=1+\varepsilon(S)=1+\frac{N(S)}{EA}, \tag{11}$$

где s — истинная криволинейная координата в продольно-деформированном состоянии вдоль топологической оси S; $N(S)$ — продольная (внутренняя) сила.

В обобщенной теории балки Эйлера – Бернулли [12] продольная сила по определению полагается тождественно равной нулю, так что:

$$N(S)\equiv 0 \;\Rightarrow\; \lambda(S)=1,$$

и сохраняется классическое выражение кривизны (9) в терминах лагранжевой координаты. Однако такая постановка не учитывает геометрически индуцированную продольную силу, неизбежно возникающую при искривлении нейтрального слоя, о которой речь пойдет далее.

В топологической теории балки продольная деформация $\lambda(S)$ уже не может считаться равной единице: изменение дуговой длины приводит к изменению истинной кривизны, которая в общем случае определяется как формула (9), что приводит к упрощенному определению кривизны в терминах Лагранжа и полностью соответствует случаю, описываемому обобщенной теорией балки Эйлера – Бернулли

В топологической же теории балки продольная деформация $\lambda(S)$ возникает неизбежно при искривлении нейтрального слоя и изменяет истинную дуговую длину. В этом более общем случае истинная кривизна определяется точно:

$$\kappa(s)=\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\lambda(S)}\frac{d\theta(S)}{dS}. \tag{12}$$

Из этой формулы с учетом формулы (11):

$$\kappa(s)=\frac{1}{1+N(S)/EA}\frac{d\theta(S)}{dS}. \tag{13}$$

непосредственно следует, что продольное растяжение ($N>0$, $\lambda>1$) уменьшает кривизну (балка «распрямляется»), тогда как продольное сжатие ($N<0$, $\lambda<1$) увеличивает ее. Таким образом, изгибающий момент и продольная сила оказывают взаимное влияние через коэффициент удлинения $\lambda(S)$.

Эйлер в своем классическом вариационном подходе [11] минимизировал функционал (1), что эквивалентно $\int \kappa^2 ds$ в строгом геометрическом смысле. Подставляя формулу (12) в функционал изопериметрической формы Эйлера (8), получаем их геометрически строгий аналог — функционал изгибной энергии в топологической системе координат, в котором продольное растяжение включено естественным образом:

$$\mathcal{Z} = \int_0^{L_S} \kappa^2 ds = \int_0^{L_S} \left(\frac{1}{\lambda(S)} \frac{d\theta(S)}{dS} \right)^2 \lambda(S) dS,$$

где L_S — длина балки в топологической системе координат S. После сокращения множителей имеем энергетически согласованный функционал:

$$\mathcal{Z} = \int_0^{L_S} \frac{1}{\lambda(S)} \left(\frac{d\theta(S)}{dS} \right)^2 dS. \tag{14}$$

Это ключевой результат. Он показывает, что:

- в классической теории Эйлера – Бернулли изгибная энергия пропорциональна $(d\theta/dx)^2$ (см. подынтегральное выражение формулы (6));
- в строгой геометрической постановке изгибная энергия уменьшается при растяжении ($\lambda > 1$) и увеличивается при сжатии ($\lambda < 1$);
- множитель $1/\lambda(S)$ играет роль топологического модификатора кривизны: продольное растяжение уменьшает эффективную кривизну, а продольное сжатие увеличивает.

Нахождение уравнения Эйлера – Лагранжа для функционала (14) приводит к условию:

$$\frac{d}{dS} \left(\frac{d\theta}{dS} \frac{1}{\lambda(S)} \right) = 0, \tag{15}$$

которое означает, что величина $\frac{d\theta}{dS} \frac{1}{\lambda(S)}$ остается строго постоянной вдоль стержня. Эта величина интегрируется в элементарной форме:

$$\frac{d\theta}{dS} \frac{1}{\lambda(S)} = C, \quad \frac{d\theta}{dS} = C \cdot \lambda(S), \tag{16}$$

где C — константа интегрирования, определяемая граничными условиями.

Однако в контексте топологической теории изгиба эта константа приобретает существенно более глубокий смысл: она выступает энергетической константой геометрически строгой постановки, определяющей неизменное равновесие между угловой и продольной деформациями стержня.

Причем продольная деформация в ТТБ имеет двойственную природу: она формируется как реакцией на внешние продольные нагрузки, так и геометрически индуцированной продольной силой, возникающей неизбежно при искривлении нейтрального слоя. Таким образом, инвариант C описывает фундаментальный баланс между изгибом и растяжением, который отсутствует в классической модели Эйлера – Бернулли вследствие допущения $\lambda \equiv 1$.

Истинная кривизна в строгой геометрии определяется через изменение угла по истинной дуговой координате s: $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$, а связь между s и топологической координатой S определяется из формулы (9):

$$ds = \lambda(S) dS \Rightarrow \frac{d}{ds} = \frac{1}{\lambda(S)} \frac{d}{dS}. \tag{17}$$

Отсюда формула (12).

Подставляя формулу (16) в формулу (12), получаем: ю $\kappa(s)=\dfrac{1}{\lambda(S)}\cdot C\lambda(S)=C=\text{const}.$ Следовательно, изгибающий момент равен:

$$M(S) = EI\kappa(s) = EIC. \tag{18}$$

Полученное выражение подчеркивает фундаментальный факт: в условиях отсутствия поперечной нагрузки инвариант $\dfrac{d\theta}{dS}\dfrac{1}{\lambda(S)}=C$ обеспечивает постоянство истинной кривизны и, следовательно, изгибающего момента. Однако гораздо более существенным является то обстоятельство, что *в общем случае*, когда изгибающий момент $M(S)$ изменяется вдоль оси стержня под действием внешних нагрузок, значение продольной деформации $\lambda(S)$ также должно изменяться, а следовательно, и продольная сила $N(S)$ таким образом, чтобы сохранялся инвариант C топологической теории балки (16).

Другими словами, инвариант C естественным образом раскладывается на произведение двух факторов: углового, $d\theta/ds$, и линейно-метрического, $1/\lambda(S)$. Первый связан с изгибной деформацией и формирует изгибающий момент через кривизну $\kappa(s) = d\theta/ds$, второй — с продольным растяжением стержня и формирует продольную силу через $\lambda(S)$. Таким образом, инвариант C задает геометрический баланс между изгибной и продольной деформациями: изменение одного из факторов неизбежно компенсируется изменением другого, чтобы сохранялась величина $\kappa(s) = C$.

В этой связи необходимо явно определить природу продольной силы в строгой геометрии. Поскольку каждая точка нейтрального слоя в недеформированном состоянии описывается топологической координатой S, а в деформированном — истинной дуговой координатой s, их связь задается метрическим соотношением Френе: $ds = \lambda(S)dS$.

Относительное удлинение элементарного участка, возникающее при переходе от dS к ds, определяется как:

$$\varepsilon(S)=\frac{ds-dS}{dS}=\lambda(S)-1.$$

Согласно одноосному закону Гука, продольная сила, обусловленная геометрическим растяжением нейтрального слоя, равна:

$$N_{geom}(S) = EA(\lambda(S) - 1). \tag{19}$$

Однако в общем случае продольная сила имеет двойственную природу:

$$N(S) = N_{ext}(S) + N_{geom}(S), \tag{20}$$

где $N_{ext}(S)$ — реакция конструкции на внешние продольные воздействия; $N_{geom}(S)$ возникает неизбежно при искривлении оси стержня.

Таким образом, $N(S)$ непосредственно выражается через метрический множитель $\lambda(S)$, описывающий переход от параметризации S к истинной дуговой координате s. В классической теории Эйлера – Бернулли этот вклад исчезает вследствие допущения $\lambda(S) \equiv 1$.

Выражение (19) является классическим, однако в контексте ТТБ оно приобретает новый структурный смысл — продольная сила $N(S)$ выражается непосредственно через метрическую плотность $\lambda(S)$, которая определяет переход от недеформированной координаты S к истинной дуговой длине s.

Объединяя это соотношение с инвариантом (16), получаем принципиально важный результат: изгибающие (угловые) деформации и продольные (метрические) деформации оказываются связанными через одну и ту же геометрию деформированной оси. Поскольку изгибающий момент определяется через истинную кривизну (18), а продольная сила — через относительное удлинение (11), оба внутренних усилия $M(S)$ и $N(S)$ оказываются геометрически сопряженными через функцию $\lambda(S)$ в строгой геометрической постановке.

Именно метрический множитель $\lambda(S)$ выступает связующим звеном между изгибной и продольной формами деформации, а инвариант (16) задает условие их неизменного баланса. Тем самым формируется фундаментальная предпосылка для получения в дальнейшем явной связи между продольной силой и изгибающим моментом в общем случае переменной кривизны и сложного нагружения.

Если учесть силовой фактор — возвратный потенциал, который определен в работе [12], и в ТТБ определяется как:

$$P(S) = -EI\frac{\theta(S)}{\lambda(S)}, \tag{21}$$

то его практическая значимость становится очевидной. Возвратный потенциал является центральным силовым параметром модели, через который автоматически и линейно восстанавливаются все остальные внутренние усилия. При этом инвариант относительно возвратного потенциала принимает простой вид отношения угла поворота к удлинению:

$$\frac{\theta(S)}{\lambda(S)} = D, \tag{22}$$

что значительно упрощает задачу.

Действительно, в топологической параметризации по S цепочка Луи Мари Анри Навье [13] приобретает строго линейную форму:

$$M(S) = \frac{dP(S)}{dS};\ Q(S) = \frac{dM(S)}{dS};\ q(S) = -\frac{dQ(S)}{dS}. \tag{23}$$

Эти соотношения показывают, что в ТТБ возвращается фундаментальная структура внутреннего силового баланса, утраченная в классической модели Эйлера – Бернулли из-за линейных кинематических допущений.

Возвратный потенциал $P(S)$ становится главным силовым фактором — аналогом момента M в классике, но допускающим строгую геометрическую интерпретацию и автоматически учитывающим влияние продольного растяжения через $\lambda(S)$ и углового поля $\theta(S)$. В этом контексте инвариант (22) выступает как линейная конститутивная связь между угловыми и линейными деформациями балки в топологической системе координат, а уравнение (21) становится конститутивным уравнением топологической теории балки.

Восстановление геометрии деформированной оси, так же как и в обобщенной теории балки Эйлера – Бернулли, осуществляется путем перехода к декартовой системе координат (x, y)). При этом классические интегралы Френе по истинной дуговой координате s модифицируются для топологической параметризации S с учетом метрического множителя $\lambda(S) = ds/dS$. В результате форма нейтрального слоя описывается следующими обобщенными интегралами Жана Фредерика Френе [14]:

$$\begin{cases} x(S) = \int\limits_0^S \frac{dx(\xi)}{ds}\frac{ds}{d\xi}d\xi = \int\limits_0^S \lambda(\xi)\cdot\cos\theta(\xi)d\xi; \\ y(S) = \int\limits_0^S \frac{dy(\xi)}{ds}\frac{ds}{d\xi}d\xi = \int\limits_0^S \lambda(\xi)\cdot\sin\theta(\xi)d\xi, \end{cases} \tag{24}$$

где S — топологическая координата вдоль деформированной нейтральной оси; $\theta(\xi)$ — локальный угол поворота сечения; $\lambda(\xi)$ учитывает отличие истинной дуговой длины от недеформированной. При $\lambda(S) \equiv 1$ выражения (24) вырождаются в классические интегралы Френе по дуге.

Использование этих обобщенных интегралов Френе позволяет обойти фундаментальное допущение Эйлера $dx \approx \text{const}$ и получить истинную геометрию деформированной оси балки. Именно такой подход — восстановление формы изогнутого стержня посредством квадратур — и предлагал Эйлер (см. формулу (4)), но в ТТБ он реализуется в естественной топологической параметризации с учетом метрического множителя $\lambda(S)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящем разделе выполняется аналитическая верификация топологической теории балки (ТТБ). Она основана на сопоставлении конститутивных соотношений, полученных двумя независимыми методами — через строгую геометрию и через вариационный метод Эйлера – Лагранжа, т.е. посредством минимизации геометрического и энергетического функционалов. Такой анализ позволяет показать внутреннюю непротиворечивость ТТБ и продемонстрировать, что ее силовые уравнения выводятся одновременно и из геометрических соотношений кривизны, и из энергетического принципа минимума потенциальной энергии.

Одновременно с этим будет показан важный — хотя и редко формулируемый явно — факт: классический энергетический функционал Эйлера – Бернулли учитывает только работу изгибающего момента, тогда как продольная работа полностью исключена не по физическим причинам, а как следствие аппроксимации $ds \approx dx$. Следует подчеркнуть, что такой энергетический анализ классической теории носит ретроспективный характер: во времена Эйлера вариационная формулировка еще не существовала (появятся позже — благодаря Лагранжу и Гамильтону [15, 16]), и классическая теория была получена не энергетическим, а геометрическим путем. Лишь в современной интерпретации классическая модель допускает представление через функционал потенциальной энергии — но этот функционал по своей природе неполон.

Для ясности восстановим структуру классической постановки. В модели Эйлера – Бернулли используется предположение о малости угловых деформаций, позволяющее отождествить истинную дуговую длину нейтрального слоя с ее горизонтальной проекцией:

$$ds \approx dx. \tag{25}$$

Данное допущение делает невозможным учет продольного растяжения, поскольку относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{ds - dx}{dx} \tag{26}$$

в силу выражения (25) становится тождественно равным нулю.

Таким образом, единственный вид деформационной энергии, остающийся в классической теории, — это энергия чистого изгиба, определяемая через кривизну:

$$\kappa(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}. \tag{27}$$

Современная вариационная запись полной потенциальной энергии балки длиной L, нагруженной изгибающим моментом $M_{ext}(x)$, имеет вид:

$$\Pi_{ЭБ}[\theta] = \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx - \int_0^L M_{ext}(x)\theta(x)\,dx. \tag{28}$$

Минимизация функционала формулы (28) по $\theta(x)$ приводит к уравнению Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\theta}{dx}\right) = M_{ext}(x). \tag{29}$$

Из формулы (29) вытекает конститутивное соотношение классической теории:

$$M(x) = EI\frac{d\theta}{dx}. \tag{30}$$

Эта связь энергетически корректна в рамках классической модели, но является прямым следствием исключения продольной работы из функционала. В действительности истинная энергия деформации должна включать вклад продольного растяжения нейтрального слоя, однако в классической постановке он невозможен из-за аппроксимации (25).

Кроме того, как показано в работе [12], основная неизвестная классической теории балки — функция $y(x)$ не является функцией прогиба, хотя традиционно ею считается. Классическая модель дает корректные значения только кривизны и углов поворота балки — т.е. первые и вторые производные «функции прогиба». Именно они используются при построении энергетического функционала (28), тогда как сам прогиб не является независимой кинематической переменной и восстанавливается лишь параметрическим интегрированием.

Таким образом формула (30) является единственным энергетически обоснованным законом для классической теории балки: продольная сила в ней отсутствует не вследствие физической идеализации, а из-за встроенного геометрического приближения, не позволяющего учесть метрическую неоднородность деформированного состояния.

В отличие от классической постановки, в топологической теории балки геометрия и энергия описываются существенно точнее. Для вывода энергетического инварианта рассмотрим комплементарный функционал в силовой форме, задаваемый через возвратный потенциал $P(S)$ и метрический множитель $\lambda(S)$:

$$\hat{\Pi}_{\text{ТТБ}}\left[P,\lambda\right]=\int_0^{L_S}\left[\frac{P^2\left(S\right)}{2EI}\lambda\left(S\right)-P\left(S\right)\Theta_{ext}\left(S\right)\right]dS,$$

где $\Theta_{ext}(S)$ характеризует заданное распределение угловых деформаций.

Здесь знак «минус» при работе внешних угловых воздействий отражает тот факт, что возвратный потенциал направлен на восстановление исходного состояния, т.е. является внутренним силовым противодействием деформирующим воздействиям.

Минимизация этого функционала по $P(S)$ (в отсутствие производных $P'(S)$) приводит к алгебраическому уравнению:

$$\frac{P\left(S\right)\lambda\left(S\right)}{EI}=\Theta_{ext}\left(S\right).$$

С учетом определения возвратного потенциала, $P(S) = -EI\,\theta(S)/\lambda(S)$, получаем:

$$-\theta\left(S\right)=\Theta_{ext}\left(S\right)\;\Rightarrow\;\frac{\theta\left(S\right)}{\lambda\left(S\right)}=-\Theta_{ext}\left(S\right).$$

В эталонной задаче $\Theta_{ext}(S)$ = const., поэтому отношение $\theta(S)/\lambda(S)$ остается постоянным вдоль стержня:

$$\frac{\theta\left(S\right)}{\lambda\left(S\right)}=D=\text{const}. \tag{31}$$

Полученный инвариант (31) отражает баланс продольной и угловой деформаций в силовой формулировке ТТБ. Однако для полной верификации модели необходимо показать, что аналогичный инвариант возникает и при вариации энергии относительно геометрически строгой кривизны — т.е. в геометрической форме вариационного принципа.

Другими словами, энергетическая строгость ТТБ должна проявляться в том, что оба независимых функционала — комплементарный (в терминах P) и геометрический (в терминах θ) — приводят к тождественной конститутивной связи.

Поэтому далее рассмотрим вариацию функционала полной потенциальной энергии относительно углового поля $\theta(S)$, учитывая метрическую структуру деформированного состояния по соотношению Френе $ds = \lambda(S)dS$ и истинное определение кривизны:

$$\kappa\left(s\right)=\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\lambda\left(S\right)}\frac{d\theta}{dS}.$$

Тогда упругая энергия изгиба в топологической параметризации принимает вид:

$$\Pi_{\text{ТТБ}}\left[\theta,\lambda\right]=\frac{EI}{2}\int_0^{L_S}\kappa^2\left(S\right)dS-\int_0^{L_S}M_{ext}\left(S\right)\theta\left(S\right)dS.$$

С учетом выражений для κ и ds получаем:

$$\kappa^2\left(s\right)ds=\left(\frac{1}{\lambda\left(S\right)}\frac{d\theta}{dS}\right)^2\lambda\left(S\right)dS=\frac{1}{\lambda\left(S\right)}\left(\frac{d\theta}{dS}\right)^2dS,$$

и функционал переписывается как:

$$\Pi_{\text{ТТБ}}\left[\theta,\lambda\right]=\frac{EI}{2}\int_0^{L_S}\frac{1}{\lambda\left(S\right)}\left(\frac{d\theta}{dS}\right)^2dS-\int_0^{L_S}M_{ext}\left(S\right)\theta\left(S\right)dS. \qquad (32)$$

Это точный аналог классического функционала (28), но уже в строгой геометрии и с явным учетом метрического множителя $\lambda(S)$.

Минимизация функционала (32) по $\theta(S)$ приводит к уравнению Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dS}\left(EI\frac{1}{\lambda\left(S\right)}\frac{d\theta}{dS}\right)=M_{ext}\left(S\right). \qquad (33)$$

Если определить изгибающий момент как:

$$M\left(S\right)=EI\frac{1}{\lambda\left(S\right)}\frac{d\theta}{dS}, \qquad (34)$$

то формула (33) принимает классический по форме вид:

$$\frac{dM\left(S\right)}{dS}=M_{ext}\left(S\right),$$

что является строгим вариационным обоснованием конститутивного соотношения (34) в ТТБ.

Теперь получим энергетическое обоснование инварианта C. Рассмотрим участок балки вне зоны приложения внешнего момента, т.е. при:

$$M_{ext}(S)\equiv 0.$$

Тогда из формулы (33):

$$\frac{d}{dS}\left(\frac{1}{\lambda\left(S\right)}\frac{d\theta}{dS}\right)=0\ \Rightarrow\ \frac{1}{\lambda\left(S\right)}\frac{d\theta}{dS}=C=\text{const}. \qquad (35)$$

Используя определение кривизны:

$$\kappa\left(s\right)=\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\lambda\left(S\right)}\frac{d\theta}{dS}=C.$$

получаем постоянство истинной кривизны и, следовательно, формула (18) = const, что полностью совпадает с классическим результатом для участка чистого изгиба, но теперь получено в строгой геометрически-энергетической постановке, без приближения $ds\approx dx$.

Таким образом:

- вывели инвариант $\frac{1}{\lambda\left(S\right)}\frac{d\theta}{dS}=C$ не только геометрически (как в разделе «Метод»), но и как первый интеграл вариационной задачи для функционала (32);
- показали, что геометрический и энергетический подходы в ТТБ приводят к одному и тому же инварианту C, который выражает постоянство истинной кривизны (и момента) в задаче чистого изгиба.

Сопоставляя результаты геометрического и энергетического анализа, полученные в настоящем разделе, следует подчеркнуть фундаментальное обстоятельство: оба инварианта топологической теории балки — C и D — являются первыми интегралами вариационной постановки, но в двух взаимодополняющих формулировках.

Инвариант

$$\frac{1}{\lambda(S)}\frac{d\theta}{dS}=C=\text{const},$$

возникает при минимизации функционала по угловому полю $\theta(S)$ для эталонной задачи истинного изгиба и выражает постоянство истинной кривизны и, следовательно, постоянство изгибающего момента при отсутствии распределенной нагрузки.

Инвариант

$$\frac{\theta(S)}{\lambda(S)}=D=\text{const},$$

получается в сопряженной вариационной постановке, где минимизируется комплементарная энергия относительно возвратного потенциала $P(S)$. Этот инвариант представляет собой линейную конститутивную связь между угловыми и продольными деформациями балки и непосредственно приводит к энергетически строгому выражению возвратного потенциала:

$$P(S)=-EI\,\frac{\theta(S)}{\lambda(S)}.$$

Таким образом, оба инварианта C и D относятся к одному и тому же силовому полю балки, но характеризуют различные фундаментальные связи между изгибом и продольным растяжением (табл.).

Фундаментальные инварианты топологической теории балки (ТТБ)

Инвариант	Геометрический смысл	Физический смысл	Продольная сила
$\frac{1}{\lambda(S)}\frac{d\theta}{dS}=C$	Постоянная истинная кривизна	Постоянный истинный момент	Может быть $\neq 0$
$\frac{\theta(S)}{\lambda(S)}=D$	Постоянное θ/λ	Баланс изгиба и растяжения	Учитывается явно

Fundamental invariants of the Topological Beam Theory (TBT)

Invariant	Geometric meaning	Physical interpretation	Axial force
$\frac{1}{\lambda(S)}\frac{d\theta}{dS}=C$	Constant true curvature	Constant true bending moment	May be non-zero
$\frac{\theta(S)}{\lambda(S)}=D$	Constant ratio θ/λ	Geometric balance between bending and stretching	Explicitly accounted for

Оба инварианта выведены строго вариационно, без каких-либо аппроксимаций типа $ds \approx dx$. Геометрический и энергетический подходы дают одно и то же конститутивное ядро ТТБ, что подтверждает ее внутреннюю непротиворечивость и фундаментальную строгость.

Обобщенная теория балки Эйлера – Бернулли [12] получается как частный, вырожденный случай ТТБ при $\lambda(S) \equiv 1$, что устраняет геометрически индуцированную продольную деформацию и тем самым приводит к исчезновению инварианта $\frac{\theta(S)}{\lambda(S)} = D$, поскольку в выражении возвратного потенциала $P(S)$ он сводится к $\theta(S)$ как единственной деформационной переменной:

$$N(S) = 0;\ P(S) = -EI\,\theta(S);\ M(S) = \frac{dP}{dS};\ Q(S) = \frac{d^2P}{dS^2};\ q(S) = -\frac{d^3P}{dS^3}.$$

Классическая теория Эйлера – Бернулли представляет собой дальнейшую линейную геометрическую аппроксимацию, в которой истинная дуговая координата нейтрального слоя заменяется ее горизонтальной проекцией: $ds \approx dx$, причем $dx = \text{const}$.

Угол поворота $\theta(x)$ и его производная $d\theta/dx$ определяются в прямолинейной координате $x \in [0, L]$, являющейся разверткой естественной лагранжевой координаты $s \in [0, L]$.

Такое допущение означает предустановленное продольное стеснение нейтрального слоя: геометрически балка при изгибе *всегда* удлиняется и возникает геометрически индуцированная продольная сила, стремящаяся вернуть ее к исходной длине.

Однако в классической постановке эта продольная деформация:

- не допускается геометрически (поскольку $ds \approx dx$);
- не учитывается энергетически (в функционале отсутствует вклад осевой работы);
- формально подменяется постоянным условием $N(x) \equiv 0$.

Таким образом теряется метрическая структура деформированного состояния, а связь между изгибом и растяжением исчезает, что приводит к внутреннему энергетическому вырождению модели:

$$N(x) = 0;\ M(x) = EI\frac{d\theta}{dx};\ Q(x) = \frac{dM}{dx};\ q(x) = -\frac{dQ}{dx}.$$

Таким образом, топологическая теория балки формирует геометрически строгую, энергетически строгую и внутренне согласованную модель, которая сохраняет все преимущества классической теории, но выводит ее за пределы линейных ограничений. В отличие от модели Эйлера – Бернулли, ТТБ допускает естественный учет геометрически индуцированного продольного растяжения:

$$N_{geom}(S) = EA(\lambda(S) - 1)$$

в совокупности с внешними продольными воздействиями, обеспечивая корректное представление полной осевой силы:

$$N(S) = N_{ext}(S) + N_{geom}(S).$$

При этом метрическая деформация $\lambda(S)$ и угловая деформация $\theta(S)$ остаются структурно связанными с изгибающим моментом и возвратным потенциалом через соответствующие инварианты ТТБ — C и D, которые обеспечивают непрерывный баланс изгиба и растяжения в строгой геометрической постановке.

Принятые в работе соглашения о положительных направлениях и знаках силовых факторов определяют вид дифференциальных уравнений равновесия; изменение этих соглашений может приводить лишь к смене знака при некоторых членах, не затрагивая фундаментальной структуры модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выполнено переосмысление классической теории изгиба балки, основанной на фундаментальной идее Якоба Бернулли. Центральный закон, установленный им более трех веков назад — пропорциональная связь кривизны и изгибающего момента $\kappa \propto M$ —

остается неизменным. Однако меняется наше понимание того, где и как эта пропорциональность реализуется.

Эйлер, развивая идеи Якоба Бернулли (см. выделенный фрагмент текста на рис. 1), справедливо отметил:

«…хотя это уже превосходно было сделано великим мужем Якобом Бернулли; однако, пользуясь представившейся возможностью, добавлю несколько замечаний относительно свойств упругих кривых, их различных видов и форм, что либо упущено другими, либо рассмотрено лишь вскользь».

Использовав прямоугольную систему координат, которая представилась ему наиболее удобной для перехода от пропорциональности кривизны и момента к равенству $\kappa = \frac{M}{EI}$, Эйлер тем самым выбрал удобную развертку кривой в прямую ось x. Однако это удобство сопровождалось допущением $ds \approx dx$, что позволило построить классическую теорию балки, но ценой утраты продольной деформации нейтрального слоя. Именно эта линейная подмена метрической структуры породила то, что сегодня принято называть «геометрически нелинейными задачами».

Выполненная работа [12] показывает: геометрическая нелинейность — не особый режим деформирования, а следствие выбора координат.

Переход к топологической координате S, сохраняющей истинную дуговую длину $ds = \lambda(S)dS$, позволяет устранить это искажение. На этой основе сформулирована топологическая теория балки (ТТБ) — геометрически и энергетически строгая модель изгиба стержней, в которой:

- введен возвратный потенциал $P(S)$ как главный силовой фактор;
- получены два независимых вариационных инварианта C и D;
- показано, что продольная сила $N(S)$ является естественной частью изгиба;
- классическая модель Эйлера – Бернулли возникает как ее вырожденный линейный случай, соответствующий $\lambda(S) \equiv 1$.

Отсюда вытекает ключевой результат: истинный изгиб не может существовать без продольных деформаций. «Чистый изгиб» как состояние с $M \neq 0$ и $N = 0$ «существует» только в линейной геометрической аппроксимации, а не в реальной механике.

Таким образом, спустя более 330 лет теория балки возвращается к своим истокам — но на новом уровне строгости и глубины. Перефразируя Эйлера, можно сказать, что в настоящей работе, *«пользуясь представившейся возможностью, мы добавили некоторые замечания относительно свойств упругих кривых, их различных видов и форм, что иные упустили или коснулись лишь вскользь»*. По сути здесь реализуется тот же фундаментальный закон изгиба Бернулли — пропорциональная связь кривизны и момента, — но теперь в топологической системе координат, сохраняющей истинную геометрию деформированной оси. Суть закона остается прежней; изменяется лишь форма его выражения — и вместе с этим устраняются ограничения, привнесенные прямоугольной координатой и допущением $ds \approx dx$.

Известно, что Якоб Бернулли завещал украсить свою могилу в Базеле логарифмической (равноугольной) спиралью — *spira mirabilis* — и латинским девизом *«Eadem mutata resurgo»*, что обычно переводят как «Хотя изменяюсь, восстаю той же самой». Логарифмическая спираль обладает свойством самоподобия: при любой гомотетии с центром в полюсе и соответствующем повороте ее образ совпадает с исходной кривой, т.е. форма кривой остается неизменной, меняется лишь масштаб. Именно эта удивительная инвариантность и поразила Бернулли. В нашем контексте надпись и спираль на могиле Якоба Бернулли можно трактовать как символ того, что к поставленной им задаче о связи кривизны и внутренних усилий будут многократно возвращаться на все более высоком уровне развития теории упругости — что, по сути, и произошло. Не исключено, что в будущем задача Бернулли еще не раз будет переформулирована в других системах координат, что позволит получать более простые и строгие решения без сопутствующих геометрических погрешностей. Однако уже сейчас можно с уверенностью утверждать, что один принцип останется неизменным: пропорциональная связь между изгибающим моментом и кривизной упругой линии, установленная Бернулли $\kappa \propto M$, сохранит свою справедливость независимо от выбора координат.

Зависимость между прогибом и кривизной имеет важное прикладное значение в расчетах изгибаемых железобетонных элементов по деформациям в рамках проверок критериев второй группы предельных состояний. Полученные результаты могут быть распространены и на расчет внецентренно сжатых элементов, который выполняется по деформированной схеме.

Неслучайно, что такая изящная форма связи между изгибающим моментом и кривизной представлена на обложке научно-технического журнала «Железобетонные конструкции»: $N = FY/EI$, как дань уважения и памяти выдающегося ученого, как постоянный, непреложный закон вселенной. Этот закон в такой форме записи таит в себе еще много неисследованного и удивительных открытий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галилей Г.* Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых наук. Лейден : Изд. Лодевейка Эльзевира, 1638. 300 с.
2. *Гук Р.* О восстанавливающей силе, или о свойствах упругих. Лондон : John Martyn, 1678. 56 с.
3. *Гюйгенс Х.* Колебательные часы, или геометрические доказательства о движении маятников, примененном к часам. Париж : F. Muguet, 1673. 160 с.
4. *Бернулли Я.* Кривизна упругой пластины. Ее идентичность с кривизной полотна, натянутого под действием веса. Радиусы кругов касания, выраженные в простейших терминах, вместе с некоторыми новыми теоремами, относящимися к этому вопросу // Acta Eruditorum. 1694. С. 262–276.
5. *Бернулли Я.* Решение задачи Лейбница о кривой с равными приближениями и отступлениями от заданной точки посредством выпрямления упругой кривой // Acta Eruditorum. 1694. С. 276–280.
6. *Бернулли Я.* Истинная гипотеза сопротивления твердых тел с доказательством кривизны тел, обладающих упругостью // История Королевской академии наук Парижа. 1705. С. 139–150.
7. *Бернулли Я.* Построение кривой с равными приближениями и отступлениями, с использованием выпрямления некоторой алгебраической кривой: дополнение к недавно опубликованному решению за июнь // Собрание сочинений Якоба Бернулли. Т. 1. Лозанна; Женева : Марк-Мишель Буске, 1744. С. 608–612.
8. *Бернулли Д.* Размышления и пояснения о новых колебаниях струн, изложенные в мемуарах Академии за 1747 и 1748 годы // История Королевской академии наук и изящной словесности Берлина с мемуарами за тот же год, взятыми из регистров этой академии. Берлин : Королевская академия наук и изящной словесности. Т. 9. С. 147–172.
9. *Бернулли Д.* О смешении нескольких видов простых изохронных колебаний, которые могут сосуществовать в одной и той же системе тел // История Королевской академии наук и изящной словесности Берлина с мемуарами за тот же год, взятыми из регистров этой академии. Берлин : Королевская академия наук и изящной словесности, 1753. Т. 9. С. 173–195.
10. *Бернулли Д.* Письмо № 15 к Л. Эйлеру от 24 мая 1738 г. под ред. П.Н. Фусса. СПб. : Императорская Академия наук, 1843. Т. 2. С. 446–448.
11. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. Лозанна; Женева : Марк-Мишель Буске, 1744.
12. *Нещадимов В.А.* Обобщенная теория балки Эйлера – Бернулли с возвратным потенциалом // Железобетонные конструкции. 2025. Т. 10. № 2. С. 34–50. DOI: 10.22227/2949-1622.2025.2.41-57
13. *Навье К.-Л.-М.-А.* Краткое изложение лекций, прочитанных в Школе мостов и дорог по применению механики к сооружению конструкций и машин. Париж : Фирмен Дидо, 1826. 500 с.
14. *Френе Ж.Ф.* О кривых двойной кривизны // Журнал чистой и прикладной математики. 1847. Т. 17. С. 437–447.
15. *Лагранж Ж.-Л.* Аналитическая механика. Париж : Вев. Десан, 1788. 512 с.
16. *Гамильтон У.Р.* Об общем методе в динамике // Труды Лондонского королевского общества. 1834. Т. 124. С. 247–308.

REFERENCES

1. Galilei G. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Leiden, 1638; 300. (in Russian).
2. Hooke R. *De Potentia Restitutiva, or Of Spring: Explaining the Power of Springing Bodies*. London, John Martyn, 1678. (in Russian).

3. Huygens C. *Horologium Oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. Paris, F. Muguet, 1673; 160. (in Russian).

4. Bernoulli J. Curvatura Laminae Elastica. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi studií expansí. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus. *Acta Eruditorum*. 1694; 262-276. (in Russian).

5. Bernoulli J. Solutio problematis Leibnitiani de curva accessibus et recessibus aequalibus a puncto dato, mediante rectificatione curva elastica. *Acta Eruditorum*. 1694; 276-280. (in Russian).

6. Bernoulli J. Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris*. 1705; 139-150. (in Russian).

7. Bernoulli J. Constructio Curvae Accessus et Recessus aequabilis, Ope Rectificationis Curvae cujusdam algebraicae: Addenda nuperæ solutioni Mensis Junii. *Opera Omnia, Tomus I*. Lausanne; Geneva, Marcum-Michaelem Bousquet, 1744; 608-612. (in Russian).

8. Bernoulli D. Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 & 1748. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin avec les Mémoires pour la même année, tirez des registres de cette Académie*. 1755; 9:147-172. (in Russian).

9. Bernoulli D. Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin avec les Mémoires pour la même année, tirez des registres de cette Académie*. 1755; 9:173-195. (in Russian).

10. Bernoulli D. Letter No. 15 to L. Euler, dated May 24, 1738 / Fuss P.H. (ed.). *Correspondence on Mathematics and Physics of Some Famous Geometers of the 18th Century. Vol. 2.* Saint Petersburg, Imperial Academy of Sciences, 1843; 446-448. (in Russian).

11. Euler L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausanne; Geneva, Marcum-Michaelem Bousquet, 1744. (in Russian).

12. Neshchadimov V.A. Generalized Euler–Bernoulli beam theory with return potential Reinforced Concrete Structures. 2025; 2(10):41-57. DOI: 10.22227/2949-1622.2025.2.41-57 (in Russian). (in Russian).

13. Navier C.-L.-M.-H. *Résumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. Paris, Firmin Didot père et fils, 1826; 500. (in Russian).

14. Frenet J.F. Sur les courbes à double courbure. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1847; 17:437-447. (in Russian).

15. Lagrange J.-L. *Mécanique analytique*. Paris, Veuve Desaint, 1788; 512. (in Russian).

16. Hamilton W.R. On a General Method in Dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1834; 124:247-308. (in Russian).